

(Ova stranica je ostavljena prazna)

IZVOD I DIFERENCIJAL DIFERENCIJALNI RAČUN

§ 1. Pojam izvoda. Brzina menjanja funkcije

Neki pojmovi iz fizike

428. Data je jednačina pravolinijskog kretanja tačke:

$$s = 5t + 6.$$

Odrediti srednju brzinu kretanja: a) za prvih 6 sekundi; b) za vremenski interval od kraja treće do kraja šeste sekunde.

429. Tačka M se udaljava od nepomične tačke A tako da rastojanje AM raste proporcionalno kvadratu vremena. Nakon 2 min od početka kretanja rastojanje AM iznosi 12 m. Naći srednju brzinu kretanja: a) za prvih 5 min; b) za vremenski interval od $t=4$ min do $t=7$ min; c) za vremenski interval od $t=t_1$ do $t=t_2$.

430. Data je jednačina pravolinijskog kretanja:

$$s = t^3 + \frac{3}{t}.$$

Naći srednju brzinu kretanja za vremenski interval od $t=4$ do $t=4+\Delta t$, uzimajući $\Delta t=2; 1; 0,1; 0,03$.

431. Pri slobodnom padanju telo se kreće po zakonu $s = \frac{gt^2}{2}$, pri čemu

je $g (=9,80 \text{ m/sec})$ ubrzanje zemljine teže. Naći srednju brzinu kretanja za vremenski interval od $t=5$ sec do $t+\Delta t$ sec, uzimajući $\Delta t=1$ sec, 0,1 sec, 0,05 sec, 0,001 sec; naći brzinu padanja tela na kraju pete, odnosno desete sekunde. Izvesti obrazac za brzinu padanja tela za proizvoljni momenat vremena t .

432. Dat je tanki nehomogeni štap AB . Njegova je dužina $L=20$ cm. Masa dela AM raste proporcionalno kvadratu odstojanja tačke M od tačke A , pri čemu se zna da masa odsečaka $AM=2$ cm iznosi 8 g. Naći: a) srednju linearnu gustinu dela $AM=2$ cm; b) celog štapa; c) gustinu štapa u tački M .

433. Masa tankog nehomogenog štapa AB dugačkog 30 cm raspodeljena je po zakonu

$$m = 3l^2 + 5l,$$

pri čemu je l dužina dela štapa merena od tačke A . Naći: 1) srednju linearnu gustinu štapa; 2) linearnu gustinu: a) u tački udaljenoj od tačke A za 5 cm; b) u samoj tački A ; c) na drugom kraju štapa.

434. Količina toplote Q (u kalorijama), potrebna za zagrevanje jedinice mase vode od 0° do $t^\circ\text{C}$, određuje se po obrascu:

$$Q = t + 0,00002 t^2 + 0,0000003 t^3.$$

Izračunati toplotni kapacitet vode za $t = 30^\circ$, $t = 100^\circ$.

435*. Ugaona brzina ravnomernog obrtanja definiše se količnikom ugla obrtanja i odgovarajućeg vremenskog intervala. Kako bi glasila definicija ugaone brzine neravnomernog obrtanja?

436. Kad bi proces radioaktivnog raspadanja tekao ravnomerno onda bi pod brzinom raspadanja trebalo podrazumevati količinu materije koja se raspadne u jedinici vremena. Proces, međutim, teče neravnomerno. Definirati brzinu raspadanja za takav slučaj.

437. Jačina stalne električne struje definiše se kao količina elektriciteta koja prolazi kroz poprečni presek provodnika u jedinici vremena. Dati definiciju jačine promenljive struje.

438. Termičkim koeficijentom linearnog širenja štapa naziva se priraštaj jedinice njegove dužine kad mu se temperatura poveća za 1°C , pod pretpostavkom da proces širenja usled zagrevanja teče ravnomerno. Ustvari, proces teče neravnomerno. Neka je $l = f(t)$, pri čemu je l — dužina štapa, t — temperatura. Dati definiciju koeficijenta linearnog širenja.

439. Koeficijentom istezanja opruge naziva se priraštaj jedinice dužine opruge pod dejstvom jedinice sile koja dejstvuje na svaki kvadratni santimetar poprečnog preseka opruge. Pri tome se pretpostavlja da je istezanje proporcionalno sili koja ga izaziva (Hukov zakon). Dati definiciju koeficijenta istezanja k u slučaju odstupanja od Hukovog zakona. (Neka je l — dužina opruge, S — površina poprečnog preseka, P — sila koja izaziva istezanje, i $l = \varphi(P)$).

Izvodna funkcija

440. Naći priraštaj funkcije $y = x^3$ u tački $x_1 = 2$, uzimajući da priraštaj Δx nezavisno promenljive x ima vrednost: 1) 2; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,1.

441. Naći količnik $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ ako je:

$$1) y = 2x^3 - x^2 + 1 \quad \text{za } x = 1; \quad \Delta x = 0,1;$$

$$2) y = \frac{1}{x} \quad \text{za } x = 2; \quad \Delta x = 0,01;$$

$$3) y = \sqrt{x} \quad \text{za } x = 4; \quad \Delta x = 0,4.$$

Pokazati da kad $\Delta x \rightarrow 0$ ovaj količnik teži respektivno graničnim vrednostima 4, $-\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$.

442. Data je funkcija $y=x^2$; naći približnu vrednost izvoda u tački $x=3$, uzimajući za Δx redom vrednosti: a) 0,5; b) 0,1; c) 0,01; d) 0,001.

443. $f(x)=x^2$; naći $f'(5)$; $f'(-2)$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right)$.

444. $f(x)=x^3$; naći $f'(1)$; $f'(0)$; $f'(-\sqrt{2})$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)$.

445. $f(x)=x^2$. U kojoj je tački $f(x)=f'(x)$?

446. Pokazati da za funkciju $f(x)=x^2$ važi relacija: $f'(a+b)=f'(a)+f'(b)$; da li ovaj identitet važi i za funkciju $f(x)=x^3$?

447. Naći izvod funkcije $\sin x$ za $x=0$.

448. Naći izvod funkcije $\lg x$ za $x=1$.

449. Naći izvod funkcije 10^x za $x=0$.

450. Kojoj graničnoj vrednosti teži izraz $\frac{f(x)}{x}$ kad $x \rightarrow 0$, ako je

$$f(0)=0?$$

451. Dokazati stav: ako funkcije $f(x)$ i $\varphi(x)$ u tački $x=0$ imaju vrednost nulu ($f(0)=\varphi(0)=0$), i ako u toj tački imaju izvod, i uz to je $\varphi'(0) \neq 0$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(0)}{\varphi'(0)}.$$

452. Dokazati da ako $f(x)$ ima izvod za $x=a$, onda je

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a)-af(x)}{x-a} = f(a)-af'(a).$$

453. Naći izvod funkcije:

1) x^5 ; 2) x^{10} ; 3) $x^{\frac{3}{7}}$; 4) $\sqrt[3]{x^2}$; 5) \sqrt{x} ; 6) x^{-3} ;

7) $\frac{1}{x}$; 8) $\sqrt[5]{\frac{1}{x^3}}$; 9) $x\sqrt[3]{x}$; 10) $0,7x^5$; 11) $\frac{1}{12}x^{12}$;

12) ax^{-7} ; 13) $\sqrt[n]{x}$; 14) $\frac{p}{x}$; 15) $ax^{-\frac{2}{3}}$.

Geometrijski smisao izvoda

454. Data je parabola $y=x^2$; naći koeficijent pravca tangente povučene: 1) u koordinatnom početku; 2) u tački (3; 9); 3) u tački (-2; 4); 4) u tačkama preseka parabole sa pravom $y=3x-2$.

455. U kojim tačkama koeficijent pravca tangente kubne parabole $y=x^3$ ima vrednost 3?

456. U kojoj je tački tangenta parabole $y=x^2$: paralelna x -osi; 2) obrazuje sa x -osom ugao od 45° ?

457. Može li tangenta kubne parabole $y=x^3$ zaklapati sa y -osom tup ugao?

458. Pod kojim se uglom seku parabola $y=x^2$ i prava $3x-y-2=0$?

459. Pod kojim se uglom seku parabole $y=x^2$ i $y^2=x$?

460. Pod kojim se uglom seku hiperbola $y=\frac{1}{x}$ i parabola $y=\sqrt{x}$?

461. Napisati jednačine tangente i normale, povučениh na krivu $y=x^3$ u tački s apscisom 2. Naći subtangentu i subnormalu.

462. Za koju su vrednost nezavisno promenljive x tangente krivih $y=x^2$ i $y=x^3$ paralelne?

463. U kojoj je tački tangenta parabole $y=x^2$: 1) paralelna pravom $y=4x-5$; 2) normalna na pravu $2x-6y+5=0$; 3) zaklapa sa pravom $3x-y+1=0$ ugao od 45° ?

464. Dokazati da je subtangenta, koja odgovara bilo kojoj tački parabole $y=ax^2$, jednaka polovini apscise tačke dodira. Izvesti otuda način za konstrukciju tangente parabole u datoj tački.

465. Dokazati da normala parabole u bilo kojoj njenoj tački polovi ugao između fokalnog potega te tačke i prave koja prolazi kroz tu tačku i paralelna je osi parabole.

§ 2. Diferenciranje funkcija

Zbir, proizvod i količnik stepenih funkcija

466. Naći izvod funkcije (x, y, z, t, u, v — su nezavisno promenljive; a, b, c, m, n, p, q — su konstante):

1) $3x^2-5x+1$; 2) $x^4-\frac{1}{3}x^3+2,5x^2-0,3x+0,1$;

3) ax^2+bx+c ; 4) $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{2}$;

5) $2\sqrt{x}-\frac{1}{x}+\sqrt[4]{3}$; 6) $0,8\sqrt[4]{y}-\frac{y^3}{0,3}+\frac{1}{5y^2}$;

7) $\frac{x}{n}+\frac{n}{x}+\frac{x^2}{m^2}+\frac{m^2}{x^2}$; 8) $\frac{mx^2}{\sqrt{x}}+\frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}-\frac{p\sqrt{x}}{x}$;

9) $\frac{mz^2+nz+4p}{p+q}$; 10) $0,1t^{-\frac{2}{3}}-\frac{5,2}{t^{1,4}}+\frac{2,5}{\sqrt[5]{t}}$;

11) $(x-0,5)^2$; 12) $\sqrt{x}(x^3-\sqrt{x}+1)$; 13) $(v+1)^2(v-1)$;

14) $0,5-3(a-x)^2$; 15) $\frac{ax^3+bx^2+c}{(a+b)x}$; 16) $\left(\frac{mu+n}{p}\right)^3$.

467. $f(x) = 3x - 2\sqrt{x}$. Naći: $f(1)$; $f'(1)$; $f(4)$; $f'(4)$; $f(a^2)$; $f'(a^2)$.

468. $f(t) = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^3}$. Naći: $f(-1)$; $f'(-1)$; $f'(2)$; $f'\left(\frac{1}{a}\right)$.

469. $f(z) = \frac{2z^3 - 3z + \sqrt{z} - 1}{z}$. Naći: $f'\left(\frac{1}{4}\right)$.

470. $f(x) = 4 - 5x + 2x^3 - x^5$. Pokazati da je:

$$f'(a) = f'(-a).$$

U zadacima 471 — 489 diferencirati navedene funkcije (x, y, z, t, u, v, s su promenljive, a, b, c, d, m su konstante).

471. 1) $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$;

2) $y = (x^3 - 3x + 2)(x^4 + x^2 - 1)$;

3) $y = (\sqrt{x} + 1)\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right)$;

4) $y = \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - \sqrt{3}\right)\left(4x\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x^2}}{3x}\right)$;

5) $y = (\sqrt[3]{x} + 2x)(1 + \sqrt[3]{x^2} + 3x)$;

6) $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$;

7) $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})$.

472. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

473. $y = \frac{x}{x^2+1}$.

474. $s = \frac{3t^2+1}{t-1}$.

475. $u = \frac{v^3-2v}{v^2+v+1}$.

476. $y = \frac{ax+b}{cx+d}$.

477. $z = \frac{x^2+1}{3(x^2-1)} + (x^2-1)(1-x)$.

478. $u = \frac{v^5}{v^3-2}$.

479. $y = \frac{1-x^3}{1+x^3}$.

480. $y = \frac{2}{x^3-1}$.

481. $u = \frac{v^2-v+1}{a^2-3}$.

482. $y = \frac{1-x^3}{\sqrt{\pi}}$.

483. $z = \frac{1}{t^2+t+1}$.

484. $s = \frac{1}{t^2-3t+6}$.

485. $y = \frac{2x^4}{b^2-x^2}$.

$$486. y = \frac{x^2 + x - 1}{x^3 + 1}.$$

$$487. y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}.$$

$$488. y = \frac{ax + bx^2}{am + bm^2}.$$

$$489. y = \frac{a^2 b^2 c^2}{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

$$490. f(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1); \text{ naći: } f'(0) \text{ i } f'(1).$$

$$491. F(x) = (x-1)(x-2)(x-3); \text{ naći: } F'(0); F'(1) \text{ i } F'(2)$$

$$492. F(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{3}{x^2+1}; \text{ naći: } F'(0) \text{ i } F'(-1).$$

$$493. s(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5}; \text{ naći } s'(0) \text{ i } s'(2).$$

$$494. y(x) = (1+x^3) \left(5 - \frac{1}{x^2} \right); \text{ naći } y'(1) \text{ i } y'(a).$$

$$495. \rho(\varphi) = \frac{\varphi}{1-\varphi^2}; \text{ naći } \rho'(2) \text{ i } \rho'(0).$$

$$496. \varphi(z) = \frac{a-z}{1+z}; \text{ naći } \varphi'(1).$$

$$497. z(t) = (\sqrt{t^3+1})t; \text{ naći } z'(0).$$

Stepen funkcije

U zadacima 498 — 515 diferencirati date funkcije.

$$498. 1) (x-a)(x-b)(x-c)(x-d);$$

$$2) (x^2+1)^4; 3) (1-x)^{20}; 4) (1+2x)^{30}; 5) (1-x^2)^{10};$$

$$6) (5x^3+x^2-4)^5; 7) (x^3-x)^6; 8) \left(7x^2 - \frac{4}{x} + 6 \right)^6;$$

$$9) s = \left(t^3 - \frac{1}{t^3} + 3 \right)^4; 10) y = \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2;$$

$$11) y = \left(\frac{1+x^2}{1+x} \right)^5; 12) y = (2x^3 + 3x^2 + 6x + 1)^4.$$

$$499. v = \frac{(s+4)^2}{s+3}.$$

$$500. s = \frac{t^3}{(1-t)^2}.$$

$$501. y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}.$$

$$502. y = \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{1+\sqrt[3]{2x}}.$$

$$503. y = \sqrt{1-x^2}.$$

$$504. y = (1-2x^{\frac{1}{2}})^4.$$

505. $u = \left(\frac{v}{1-v} \right)^m$.

506. $y = \frac{2}{(x^2 - x + 1)^2}$.

507. $y = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

508. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$.

509. $y = \frac{1}{\sqrt{1-x^4-x^8}}$.

510. $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$.

511. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

512. $u = \frac{1}{v - \sqrt{a^2 + v^2}}$.

513. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt{(x^2+2)^3}}$.

514. $u(v) = (v^2 + v + 2)^{\frac{3}{2}}$; naći $u'(1)$.

515. $y(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; naći $y'(2)$.

516. Dokazati da je izvod parne funkcije neparna, a izvod neparne — parna funkcija.

Trigonometrijske funkcije

U zadacima 517 — 546 diferencirati date funkcije.

517. $y = \sin x + \cos x$.

518. $y = \frac{x}{1 - \cos x}$.

519. $y = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

520. $\rho = \varphi \sin \varphi + \cos \varphi$.

521. $z = \frac{\sin \alpha}{\alpha} + \frac{\alpha}{\sin \alpha}$.

522. $s = \frac{\sin t}{1 + \cos t}$.

523. $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$.

524. $y = \frac{x \sin x}{1 + \operatorname{tg} x}$.

525. $y = \cos^2 x$.

526. $y = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x$.

527. $y = \cos x - \frac{1}{3} \cos^3 x$.

528. $y = 3 \sin^2 x - \sin^3 x$.

529. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

530. $y = x \sec^2 x - \operatorname{tg} x$.

531. $y = \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x$.

532. $y = \sin 3x$.

533. $y = a \cos \frac{x}{3}$.

534. $y = 3 \sin(3x + 5)$.

535. $y = \operatorname{tg} \frac{x+1}{2}$.

536. $y = \sqrt{1 + 2 \operatorname{tg} x}$.

537. $y = \sin \frac{1}{x}$.

538. $y = \sin(\sin x)$.

539. $y = \cos^3 4x$.

540. $y = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

541. $y = \sin \sqrt{1+x^2}$.

542. $y = \operatorname{ctg} \sqrt[3]{1+x^2}$.

543. $y = (1 + \sin^2 x)^4$.

544. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg} \left(x + \frac{1}{x}\right)}$.

545. $y = \cos^2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

546. $y = \sin^2(\cos 3x)$.

547. Izvesti formule:

$$(\sin^n x \cos nx)' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x;$$

$$(\sin^n x \sin nx)' = n \sin^{n-1} x \sin(n+1)x;$$

$$(\cos^n x \sin nx)' = n \cos^{n-1} x \cos(n+1)x;$$

$$(\cos^n x \cos nx)' = -n \cos^{n-1} x \sin(n+1)x.$$

Funkcije inverzne trigonometrijskim

U zadacima 548 — 572 diferencirati date funkcije

548. $y = x \arcsin x$.

549. $y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}$.

550. $y = (\arcsin x)^2$.

551. $y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$.

552. $y = \frac{1}{\arcsin x}$.

553. $y = x \sin x \operatorname{arctg} x$.

554. $y = \frac{\arccos x}{x}$.

555. $y = \sqrt{x} \cdot \operatorname{arctg} x$.

556. $y = (\arccos x + \arcsin x)^n$.

557. $y = \operatorname{arcsec} x$.

558. $y = \frac{x}{1+x^2} - \operatorname{arctg} x$.

559. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

560. $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$.

561. $y = \arcsin(x-1)$.

562. $y = \arccos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

563. $y = \arctg x^2$.

564. $y = \arcsin \frac{2}{x}$.

565. $y = \arcsin(\sin x)$.

566. $y = \arctg^2 \frac{1}{x}$.

567. $y = \sqrt{1 - (\arccos x)^2}$.

568. $y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

569. $y = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\arcsin \sqrt{x^2 + 2x}}$.

570. $y = \arcsin \frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x}$.

571. $y = \arccos \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x}$.

572. $y = \arctg(x - \sqrt{1+x^2})$.

Logaritamske funkcije

U zadacima 573 — 597 diferencirati date funkcije.

573. $y = x^2 \log_3 x$.

574. $y = \ln^2 x$.

575. $y = x \lg x$.

576. $y = \sqrt{\ln x}$.

577. $y = \frac{x-1}{\log_2 x}$.

578. $y = x \sin x \ln x$.

579. $y = \frac{1}{\ln x}$.

580. $y = \frac{\ln x}{x^n}$.

581. $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$.

582. $y = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

583. $y = x^n \ln x$.

584. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$.

585. $y = \ln(1-2x)$.

586. $y = \ln(x^2 - 4x)$.

587. $y = \ln \sin x$.

588. $y = \log_3(x^2 - 1)$.

589. $y = \ln \operatorname{tg} x$.

590. $y = \ln \arccos 2x$.

591. $y = \ln^4 \sin x$.

592. $y = \arctg[\ln(ax+b)]$.

593. $y = (1 + \ln \sin x)^n$.

594. $y = \log_2[\log_3(\log_5 x)]$.

595. $y = \ln \arctg \sqrt{1+x^2}$.

596. $y = \arcsin^2[\ln(a^3 + x^3)]$.

597. $y = \sqrt[3]{\ln \sin \frac{x+3}{4}}$.

Eksponencijalne funkcije

U zadacima 598 — 633 diferencirati date funkcije.

598. $y = 2^x$.

599. $y = 10^x$.

600. $y = \frac{1}{3^x}$.

601. $y = \frac{x}{4^x}$.

602. $y = x \cdot 10^x$.

603. $y = xe^x$.

604. $y = \frac{x}{e^x}$.

605. $y = \frac{x^3 + 2^x}{e^x}$.

606. $y = e^x \cos x$

607. $y = \frac{e^x}{\sin x}$.

608. $y = \frac{\cos x}{e^x}$.

609. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

610. $y = x^3 - 3^x$.

611. $y = \sqrt{1 + e^x}$.

612. $y = (x^2 - 2x + 3)e^x$.

613. $y = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$.

614. $y = \frac{1 - 10^x}{1 + 10^x}$.

615. $y = \frac{e^x}{1 + x^2}$.

616. $y = xe^x (\cos x + \sin x)$.

617. $y = e^{-x}$.

618. $y = 10^{2x-3}$.

619. $y = e^{\sqrt{x+1}}$.

620. $y = \sin(2^x)$.

621. $y = 3^{\sin x}$.

622. $y = a^{\sin^3 x}$.

623. $y = e^{\arcsin 2x}$.

624. $y = 2^{3^x}$.

625. $y = e^{\sqrt{\ln x}}$.

626. $y = \sin(e^{x^2+3x-2})$.

627. $y = 10^{1-\sin^4 3x}$.

628. $y = e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.

629. $y = \ln \sin \sqrt[3]{\arctg e^{3x}}$

630. $y = ae^{-b^2 x^2}$.

631. $y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}$.

632. $y = Ae^{-k^2 x} \sin(\omega x + \alpha)$.

633. $y = a^x x^a$.

Hiperbolične funkcije

U zadacima 634 — 649 diferencirati date funkcije.

634. $y = \operatorname{sh}^3 x$.

635. $y = \ln \operatorname{ch} x$.

636. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x)$.

637. $y = \operatorname{th}(1 - x^2)$.

638. $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$.

639. $y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$.

640. $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$.

641. $y = e^{\operatorname{ch}^2 x}$.

642. $y = \operatorname{th}(\ln x)$.

643. $y = x \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x$.

644. $y = \sqrt[4]{(1 + \operatorname{th}^2 x)^3}$.

645. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}$.

646. $y = \sqrt[4]{\frac{1 + \operatorname{th} x}{1 - \operatorname{th} x}}$.

647. $y = \frac{1}{2} \operatorname{th} x + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \operatorname{th} x}{1 - \sqrt{2} \operatorname{th} x}$.

648. $y = \frac{1}{x} \operatorname{ch} 2x + \sqrt{x} \operatorname{sh} 2x$.

649. $y = x^2 e^{3x} \operatorname{cosech} x$.

Logaritamsko diferenciranje

U zadacima 650 — 666 diferencirati date funkcije koristeći pravilo logaritamskog diferenciranja.

650. $y = x^{x^2}$.

651. $y = x^{x^x}$.

652. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

653. $y = (\ln x)^x$.

654. $y = \sqrt[x]{(x+1)^2}$.

655. $y = x^3 e^{x^2} \sin 2x$.

656. $y = \frac{(x-2)^2 \sqrt{x+1}}{(x-5)^3}$.

657. $y = x^{\ln x}$.

658. $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt{(x-3)^2}}$.

659. $y = \sqrt{x \sin x} \sqrt{1 - e^x}$.

660. $y = \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}$.

661. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

662. $y = x^{\sin x}$.

663. $y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

664. $y = 2x^{\sqrt{x}}$.

665. $y = (x^2 + 1)^{\sin x}$.

666. $y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}$.

Razne funkcije

U zadacima 667 — 770 diferencirati date funkcije.

667. $y = (1 + \sqrt{x})^3$.

668. $y = a \operatorname{tg} \left(\frac{x}{k} + b \right)$.

669. $y = \sqrt{1 + \sqrt{2px}}$.

670. $y = \arctg(x^2 - 3x + 2)$.

671. $y = \lg(x - \cos x)$.

672. $y = 3 \cos^2 x - \cos^3 x$.

673. $y = 5 \operatorname{tg} \frac{x}{5} + \operatorname{tg} \frac{\pi}{8}$.

674. $y = \frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

675. $y = \sin \frac{x}{2} \sin 2x$.

676. $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$.

677. $y = x^5 \sqrt{x^6 - 8}$.

678. $y = e^{-x^2} \ln x$.

679. $y = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^{10}$.

680. $y = \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x-1}$.

681. $y = e^{2x+3} \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right)$.

682. $y = \frac{2 \sin^2 x}{\cos 2x}$

683. $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$.

684. $y = \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{x}$

685. $y = \sin^2 \frac{x}{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$.

686. $y = \frac{\sqrt[9]{4x^5 + 2}}{3x^4}$.

687. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

688. $y = x \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.

689. $y = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$.

690. $y = \cos 2x \ln x$.

691. $y = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{1-x^2}$.

692. $y = \arcsin(n \sin x)$

693. $y = \arcsin \sqrt{\sin x}$.

694. $y = \frac{1}{18} \sin^6 3x - \frac{1}{24} \sin^8 3x$.

695. $y = x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x$.

696. $y = \cos \frac{\arcsin x}{2}$

697. $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

698. $y = \arccos \sqrt{1-3x}$

699. $y = \sin^2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right)$.

700. $y = \log_3(x^2 - \sin x)$

701. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

702. $y = \ln \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}$.

703. $y = x \arcsin(\ln x)$.

704. $y = \operatorname{tg} \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

705. $y = \cos x \sqrt{1 + \sin^2 x}$.

$$706. y = 0,4 \left(\cos \frac{2x+1}{2} - \sin 0,8x \right)^2.$$

$$707. y = x \cdot 10^{\sqrt{x}}.$$

$$708. y = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 2x}.$$

$$709. y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}.$$

$$710. y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$711. y = \sqrt[3]{1+x\sqrt{x+3}}.$$

$$712. y = x^2 \sqrt{1+\sqrt{x}}.$$

$$713. y = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

$$714. y = x^3 \operatorname{arctg} x^3.$$

$$715. y = \frac{\ln \sin x}{\ln \cos x}.$$

$$716. y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$717. y = \frac{\arcsin 4x}{1-4x}.$$

$$718. y = e^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$719. y = \ln \frac{1-e^x}{e^x}.$$

$$720. y = 10^{x \lg x}.$$

$$721. y = \sin^2 x \cdot \sin x^2.$$

$$722. y = \frac{2 \cos x}{\sqrt{\cos 2x}}.$$

$$723. y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}.$$

$$724. y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x.$$

$$725. y = 2^{\frac{x}{\ln x}}.$$

$$726. y = \sqrt{(a-x)(x-b)} - (a-b) \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}.$$

$$727. y = \frac{\sin 3x}{2 \sin^2 x \cos x}.$$

$$728. y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

$$729. y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \arccos \frac{x}{a}.$$

$$730. y = \sqrt{x^2 + 1} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} \right).$$

$$731. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{ctg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$732. y = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1}) - \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$733. y = e^{ax} (a \sin x - \cos x).$$

$$734. y = x e^{1 - \cos x}.$$

$$735. y = \frac{1}{\operatorname{arctg} e^{-2x}}. \quad 736. y = e^x (\sin 3x - 3 \cos 3x).$$

$$737. y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2) \sqrt{1-x^2}.$$

$$738. y = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}.$$

$$739. y = 2 \arcsin \frac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}.$$

$$740. y = \ln (e^x \cos x + e^{-x} \sin x).$$

$$741. y = \frac{1+x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$742. y = \frac{1}{\cos (x - \cos x)}$$

$$743. y = e^x \sin x \cos^3 x.$$

$$744. y = \sqrt[11]{9+6\sqrt[3]{x^9}}.$$

$$745. y = x - \ln (2e^x + 1 + \sqrt{e^{2x} + 4e^x + 1}).$$

$$746. y = e^{\operatorname{arctg} \sqrt{1+\ln(2x+3)}}$$

$$747. y = \frac{e^{x^2}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$748. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{ctg} x \operatorname{lu} (1 + \sin x) - x.$$

$$749. y = 2 \ln (2x - 3 \sqrt{1-4x^2}) - 6 \arcsin 2x.$$

$$750. y = \frac{3x^2-1}{3x^3} + \ln \sqrt{1+x^2} + \operatorname{arctg} x.$$

$$751. y = \frac{1}{2} (3-x) \sqrt{1-2x-x^2} + 2 \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}}.$$

$$752. y = \ln (x \sin x \sqrt{1-x^2}).$$

$$753. y = x \sqrt{1+x^2} \sin x.$$

$$754. y = \frac{\sqrt{x+2} (3-x)^4}{(x+1)^5}.$$

$$755. y = \sqrt[5]{(1+x e^{\sqrt{x}})^3}.$$

$$756. y = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{x^2 - \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln x + 1}$$

$$757. y = \frac{\sin x}{4 \cos^4 x} + \frac{3 \sin x}{8 \cos^2 x} + \frac{3}{8} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg} \frac{x}{2}}.$$

$$758. y = \frac{x e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^5 x}.$$

$$759. y = \frac{(1-x^2) e^{3x-1} \cos x}{(\arccos x)^3}.$$

$$760. y = x \sqrt{(x^2 + a^2)^3} + \frac{3a^2 x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{3a^4}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}).$$

$$761. y = x (\arcsin x)^2 - 2x + 2\sqrt{1-x^2} \arcsin x$$

$$762. y = \ln \cos \operatorname{arctg} \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad 763. y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right).$$

$$764. y = \frac{1}{3} \ln \frac{x+1}{\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}.$$

$$765. y = \ln \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} + 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$766. y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}. \quad 767. y = \sqrt[3]{\frac{x-5}{\sqrt{x^2+4}}}.$$

$$768. y = \ln \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}} + \frac{2}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} \right).$$

$$769. y = \arccos \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}.$$

$$770. y = -\frac{x}{1+8x^3} + \frac{1}{12} \ln \frac{(1+2x)^2}{1-2x+4x^2} + \frac{\sqrt{3}}{6} \operatorname{arctg} \frac{4x-1}{\sqrt{3}}.$$

771. Pokazati da funkcija $y = \ln \frac{1}{1+x}$ zadovoljava relaciju

$$x \frac{dy}{dx} + 1 = e^y.$$

772. Pokazati da funkcija

$$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} x \sqrt{x^2+1} + \ln \sqrt{x + \sqrt{x^2+1}}$$

zadovoljava relaciju

$$2y = xy' + \ln y'.$$

773. Pokazati da funkcija

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}}$$

zadovoljava relaciju

$$(1-x^2)y' - xy = 1.$$

774*. Izračunati zbirove

a) $1 + 2^1 x + 3^2 x^2 + \dots + nx^{n-1};$

b) $2 + 2 \cdot 3 x + 3 \cdot 4 x^2 + \dots + n(n-1) x^{n-2}.$

775. Predpostavimo da je pravilo diferenciranja stepene funkcije dokazano samo za slučaj kad je izložilac ceo pozitivan broj. Izvesti obrazac za diferenciranje korena primenom pravila za diferenciranje inverzne funkcije.

776. $x = e^{\arcsin y}$; izraziti $\frac{dy}{dx}$ pomoću y , pomoću x .

777. $t = 2 - 3s + s^3$; izraziti $\frac{ds}{dt}$ pomoću s .

778. $u = \frac{1}{2} \ln \frac{1+v}{1-v}$; proveriti da li važi relacija

$$\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{du} = 1.$$

779. Znajući da su funkcije $\arcsin \sqrt{x}$ i $\sin^2 x$ jedna drugoj inverzne, i da je $(\sin^2 x)' = \sin 2x$, naći $(\arcsin \sqrt{x})'$.

780. Označimo funkciju inverznu stepeno-eksponencijalnoj funkciji $y = x^x$, simbolom $\alpha(y)$, tj. uzmimo da iz $y = x^x$ sledi $x = \alpha(y)$; naći izvod funkcije $\alpha(y)$.

781. Funkcije inverzne hiperboličnim obeležavaju se simbolima $\text{Arsh } x$, $\text{Arch } x$, $\text{Arth } x$. Naći izvode ovih funkcija.

782. $s = te^{-t}$; naći $\frac{dt}{ds}$.

783. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$. Izraziti $\frac{dx}{dy}$ pomoću x , pomoću y . Pokazati da je $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dx}{dy} = 1.$$

784. $x = y^3 - 4y + 1$. Naći $\frac{dy}{dx}$.

785. $t = \arcsin 2^s$. Izraziti $\frac{ds}{dt}$ pomoću s , pomoću t .

786. Proveriti važi li relacija: $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1$, ako je:

1) $y = x^2 + ax + b$; 2) $y = x^{-n}$; 3) $y = \ln(x^2 - 1)$.

Funkcije definisane implicitno

787. Pokazati da su izvodi obe strane jednačine

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

identični, tj. da ovu jednačinu smemo diferencirati (stranu po stranu). „Sme“ li se diferencirati jednačina $\sin x = 1 - \cos x$?

788. Pokazati da se jednačina

$$\frac{2 \sin^2 x - 1}{\cos x} + \frac{\cos x (2 \sin x + 1)}{1 + \sin x} = \operatorname{tg} x$$

smo diferencirati.

789. Kakva mora biti funkcija $y=f(x)$ da bismo jednačinu

$$\cos^4 x + 2 \sin^2 x \cos^2 x + y^2 = 1$$

smo diferencirati stranu po stranu (tj. da bi izvodi obe strane jednačine bili identički jednaki)?

790. Šta mora biti y da bi izvodi obe strane jednačine $x^2 + y^2 = 1$ bili identični, tj. da bi bilo dozvoljeno diferencirati ovu jednačinu stranu po stranu?

791. Koliki je koeficijent pravca tangente kruga

$$(x-1)^2 + (y+3)^2 = 17.$$

u tački (2; 1)?

U zadacima 792 — 812 naći izvode funkcija y , definisanih implicitno.

792. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

793. $x^{\frac{1}{2}} + y^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}}.$

794. $x^3 + y^3 - 3axy = 0.$

795. $y^2 \cos x = a^2 \sin 3x.$

796. $y^3 - 3y + 2ax = 0.$

797. $y^2 - 2xy + b^2 = 0.$

798. $x^4 + y^4 = x^2 y^2.$

799. $x^3 + ax^2 y + bxy^2 + y^3 = 0.$

800. $\sin(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x+y).$

801. $2^x + 2^y = 2^{x+y}.$

802. $2y \ln y = x.$

803. $x - y = \operatorname{arcsin} x - \operatorname{arcsin} y.$

804. $x^y = y^x.$

805. $y = \cos(x+y).$

806. $\cos(xy) = x.$

807. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$

808. $y = 1 + xe^y.$

809. $x \sin y - \cos y + \cos 2y = 0.$

810. $\operatorname{tg} \frac{y}{2} = \sqrt{\frac{1-k}{1+k}} \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$

811. $y \sin x - \cos(x-y) = 0.$

812. $y = x + \operatorname{arctg} y.$

813. Pokazati da funkcija y , definisana jednačinom $xy - \ln y = 1$, zadovoljava takođe relaciju

$$y^2 + (xy-1) \frac{dy}{dx} = 0.$$

814. Na paraboli $y=x^2$ uzete su tačke sa apscisama $x_1=1$ i $x_2=3$, i kroz njih povučena sečica. U kojoj će tački parabole njena tangenta biti paralelna pomenutoj sečici?

815. Kroz žižu parabole povučena je sečica normalna na njenu osu simetrije; dokazati da se tangente, povučene u tačkama preseka ove sečice sa parabolom, seku pod pravim uglom.

816. Sastaviti jednačine tangente i normale hiperbole $y=\frac{1}{x}$, povučениh u tački čija je apscisa $x=-\frac{1}{2}$, i naći subtangentu i subnormalu.

817. Pokazati da tačka hiperbole $y=\frac{a}{x}$ u kojoj je povučena tangenta, polovi odsečak te tangente koji leži između koordinatnih osa.

818. Data je hiperbola $xy=a$; pokazati da je površina trougla koji obrazuje bilo koja njena tangenta sa koordinatnim osama, jednaka površini kvadrata konstruisanog nad realnom poluosom.

819. Tačka se kreće po pravoj tako da je njeno odstojanje s od početnog položaja posle t sekundi:

$$s = \frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2.$$

a) U kom je trenutku tačka bila u početnom položaju? b) U kom je trenutku njena brzina bila jednaka nuli?

820. Telo čija je masa 3 kg kreće se pravolinijski po zakonu:

$$s = 1 + t + t^2,$$

pri čemu je s izraženo u santimetrima, a t u sekundama. Izračunati kinetičku energiju $\left(\frac{mv^2}{2}\right)$ tela nakon 5 sec od početka kretanja.

821. Ugao α za koji se obrne točak zavisi od vremena t po sledećem zakonu: $\alpha = t^2 + 3t - 5$. Naći ugaonu brzinu nakon 5 sec.

822. Točak se obrće tako da je ugao obrtanja proporcionalan kvadratu vremena. Prvi pun obrt izvršen je za 8 sec. Naći ugaonu brzinu ω nakon 32 sec od početka obrtanja.

823. Ugao Θ za koji se obrne točak u toku t sec je: $\Theta = at^2 - bt + c$, gde su a, b, c — pozitivne konstante. Naći ugaonu brzinu ω obrtanja točka. Posle kog vremena će ugaona brzina biti jednaka nuli?

824. Količina elektriciteta koja protokne kroz provodnik počev od momenta $t=0$ data je obrascem

$$Q = 2t^2 + 3t + 1 \quad (\text{Kulona})$$

Izračunati jačinu struje na kraju pete sekunde.

825. Na krivoj $y = x^2(x-2)^2$ naći tačke u kojima su tangente paralelne apscisnoj osi.

826. Pokazati da je kriva $y = x^5 + 5x - 12$ u svakoj svojoj tački nagnuta prema x -osi pod oštrim uglom.

827. U kojim je tačkama krive $y = x^3 + x - 2$ njena tangenta paralelna pravoj $y = 4x - 1$?

828. Sastaviti jednačine tangenata krive $y = x - \frac{1}{x}$ u tačkama preseka sa apscisnom osom.

829. Sastaviti jednačinu one tangente krive $y = x^3 + 3x^2 - 5$, koja je normalna na pravu $2x - 6y + 1 = 0$.

U zadacima 830 — 833 sastaviti jednačine tangente i normale za datu krivu.

830. $y = \sin x$ u tački $M(x_0, y_0)$

831. $y = \ln x$ u tački $M(x_0, y_0)$.

832. $y = \frac{8a}{4a^2 + x^2}$ u tački čija je apscisa $x = 2a$.

833. $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ (cisoida) u tački $M(x_0, y_0)$.

834. Pokazati da je subtangenta parabole n -tog stepena $y = x^n$ jednaka n — tom delu apscise dodirne tačke, i odatle izvesti način za konstrukciju tangente za ovu krivu.

835. Naći subtangente i subnormale za krive: $y = x^3$, $y^2 = x^3$, $xy^2 = 1$ i izvesti način konstruisanja tangente za svaku od njih.

836. Sastaviti jednačine tangente i normale parabole $x^2 = 4ay$ u njenoj tački (x_0, y_0) , i pokazati da tangenta u tački čija je apscisa $x_0 = 2am$ ima jednačinu $x = \frac{y}{m} + am$.

837. Tetiva parabole $y = x^2 - 2x + 5$ spaja tačke čije su apscise $x_1 = 1$ i $x_2 = 3$. Sastaviti jednačinu one tangente parabole koja je paralelna tetivi.

838. Sastaviti jednačinu normale krive $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$ u tački sa apscisom $x = 3$.

839. Sastaviti jednačinu normale krive $y = -\sqrt{x} + 2$ u tački preseka sa simetralom pravog kvadranta.

840. Sastaviti jednačinu one normale parabole $y = x^2 - 6x + 6$ koja je normalna na pravoj što spaja koordinatni početak sa temenom parabole.

841. Pokazati da se normale krive $y = x^2 - x + 1$ povučene u tačkama čije su apscise $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \frac{5}{2}$, seku u jednoj tački.

842. U tačkama preseka prave $x - y + 1 = 0$ i parabole $y = x^2 - 4x + 5$ povučene su normale parabole. Naći površinu trougla koga obrazuju ove normale i data prava.

843. Pokazati da su tangente hiperbole $y = \frac{x-4}{x-2}$, povučene u tačkama preseka sa koordinatnim osama, paralelne među sobom.

844. Sastaviti jednačinu one tangente hiperbole $y = \frac{x+9}{x+5}$, koja prolazi kroz koordinatni početak.

845. Na krivoj $y = \frac{1}{1+x^2}$ naći tačku u kojoj je tangenta paralelna sa apscisnom osom.

846. Naći jednačinu tangente krive $x^2(x+y) = a^2(x-y)$ u koordinatnom početku.

847. Dokazati da se tangente krive $y = \frac{1+3x^2}{3+x^2}$, povučene u tačkama za koje je $y = 1$, seku u koordinatnom početku.

848. Povučiti onu normalu krive $y = x \ln x$, koja je paralelna pravoj $2x - 2y + 3 = 0$.

849. Izračunati odstojanje koordinatnog početka od normale krive $y = e^{2x} + x^2$, povučene u tački krive čija je apscisa $x = 0$.

850. Nacrtati krivu $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ i naći presek njenih tangenata, od kojih je jedna povučena u presečnoj tački krive sa y -osom, a druga u tački $\left(\frac{5\pi}{12}, 1\right)$.

851. Pokazati da subtangenta u svakoj tački krive $y = ae^{bx}$ (a i b su konstante) ima istu dužinu.

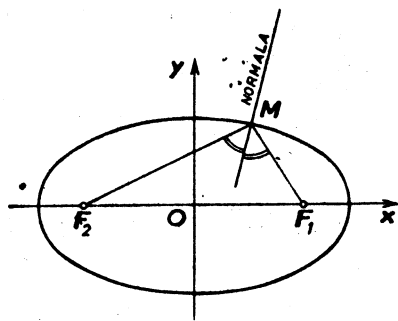
852. Pokazati da je subnormala u svakoj tački krive $y = x \ln(cx)$ (c je proizvoljna konstanta) četvrta proporcionala za apscisu, ordinatu i zbir apscise i ordinate te tačke.

853. Pokazati da svaka tangenta krive $y = \frac{1}{2}\sqrt{x-4x^2}$ preseca ordinatnu osu u tački podjednako udaljenoj od tačke dodira i od koordinatnog početka.

854. Pokazati da tangenta elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ u tački (x_0, y_0) ima jednačinu $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

855. Pokazati da tangenta hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ u tački (x_0, y_0) ima jednačinu $\frac{x \cdot x_0}{a^2} - \frac{y \cdot y_0}{b^2} = 1$.

856. Dokazati da normala elipse u svakoj tački polovi ugao između fokalnih potega te tačke (sl. 21), i otuda izvesti pravilo za konstruisanje tangente i normale elipse. Rešiti sličan zadatak za hiperbolu.



Sl. 21

857. Sastaviti jednačine onih tangenata hiperbole $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{7} = 1$, koje su normalne na pravoj $2x + 4y - 3 = 0$.

858. Kroz koordinatni početak povučena je prava L, paralelno tangenti krive K u proizvoljnoj tački M te krive. Naći geometrijsko mesto presečnih tačaka P prave L sa pravom povučenom kroz tačku M paralelno ordinatnoj osi. Naći takva geometrijska mesta za sledeće krive: a) parabolu $y^2 = 2px$, b) logaritamsku krivu $y = \lg_b x$, c) krug

$x^2 + y^2 = a^2$, d) traktrisu $y = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}$.

U zadacima 859 — 864 naći uglove pod kojima se presecaju date krive.

859. 1) $y = \frac{x+1}{x+2}$ i $y = \frac{x^2 + 4x + 8}{16}$.

2) $y = (x-2)^2$ i $y = 4x - x^2 + 4$.

860. 1) $x^2 + y^2 = 8$ i $y^2 = 2x$.

2) $x^2 + y^2 - 4x = 1$ i $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

861. $x^2 - y^2 = 5$ i $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$.

862. $x^2 + y^2 = 8ax$ i $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$.

863. $x^2 = 4ay$ i $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$.

864. $y = \sin x$ i $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$).

865. Sastaviti jednačinu tangente i normale krive $\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 2$ u tački

čija je apscisa a .

866. Dokazati da zbir odsečaka koje tangenta u svojoj tački parabole $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ odseca od koordinatnih osa, ima konstantnu vrednost a .

867. Pokazati da odsečak tangente astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, koji leži između koordinatnih osa, ima konstantnu dužinu a .

868. Dokazati da odsečak tangente traktrise $y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$

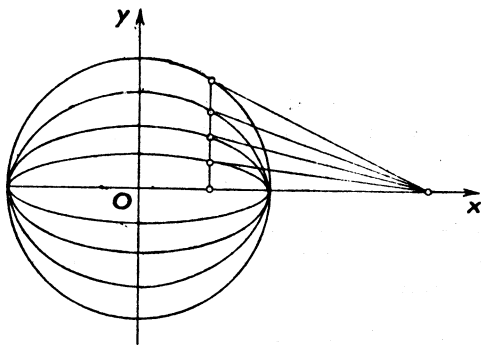
— $\sqrt{a^2 - x^2}$, od tačke dodira do ordinatne ose, ima konstantnu dužinu.

869. Pokazati da je za svaku tačku $M(x_0, y_0)$ ravnostrane hiperbole $x^2 - y^2 = a^2$ odsečak normale od tačke M do preseka sa apscisnom osom jednak potegu OM tačke M (O je koordinatni početak).

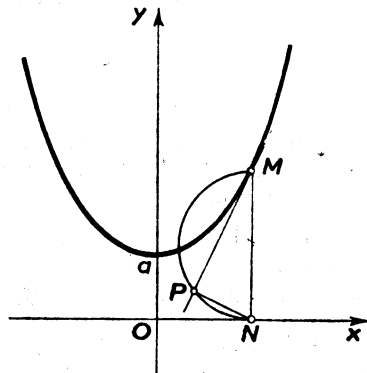
870. Pokazati da je odsečak koji tangenta u bilo kojoj tački krive $\frac{a}{x^2} + \frac{b}{y^2} = 1$ odseca od apscisne ose, proporcionalan trećem stepenu apscise tačke dodira.

871. Dokazati da je ordinata bilo koje tačke M krive $2x^2y^2 - x^4 = c$ (c je konstanta) srednja proporcionala za apscisu tačke M i razliku te apscise i subnormale krive u toj tački.

872. Dokazati da se tangente svih elipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ sa zajedničkom osom $2a$ i različitim osama $2b$ (sl. 22), povučene u tačkama sa istom apscisom,



Sl. 22



Sl. 23

seku u istoj tački koja leži na apscisnoj osi. Izvesti odavde jednostavan način konstruisanja tangente elipse.

873. Pokazati da kriva $y = e^{kx} \sin mx$ dodiruje svaku od krivih $y = e^{kx}$ i $y = e^{-kx}$ u svakoj tački koja im je zajednička.

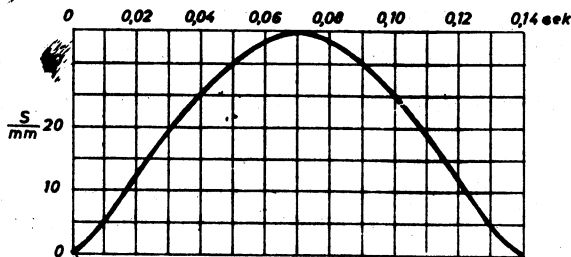
874. Tangenta lančanice $y = \frac{a}{2} (e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ konstruiše se na sledeći način: nad ordinatom NM kao prečnikom konstruiše se polukrug, i odmeri se tetiva $NP = a$ (sl. 23); prava MP biće tražena tangenta. Dokazati pravilnost ove konstrukcije.

Grafičko diferenciranje

875. Merenjem temperature kalema elektromagneta u motoru pri prolazu električne struje dobijeni su sledeći rezultati:

Vreme t u min. Temperatura θ °C	0 20	5 26	10 32,5	15 41	20 46	25 49
Vreme t u min. Temperatura θ °C	30 52,5	35 54,5	40 56,5	45 58	50 59,5	55 61

Neprekidnom krivom linijom predstaviti približno zavisnost temperature od vremena, i metodom grafičkog diferenciranja nacrtati grafik brzine menjanja temperature u zavisnosti od vremena.



Sl. 24

876. Na sl. 24 grafički je prikazano pomeranje propusnog ventila na cilindru parne mašine (niskog pritiska). Nacrtati krivu brzine koristeći metod grafičkog diferenciranja.

§ 3 Pojam diferencijala. Diferencijabilnost funkcije

Diferencijal

877. Naći priraštaj Δy funkcije $y=x^2$ koji odgovara priraštaju Δx nezavisno promenljive, ako je: $x=1$ i $\Delta x=0,1$. Kolika će biti greška (apsolutna i relativna) u vrednosti Δy ako se zaustavimo na članu koji sadrži Δx na prvom stepenu?

878. Naći priraštaj Δv zapremine lopte pri promeni poluprečnika $R=2$ za ΔR , ako je $\Delta R=0,5$; $0,01$. Kolika će biti greška u vrednosti Δv ako se zaustavimo na članu koji sadrži ΔR na prvom stepenu?

879. Data je funkcija $y=x^3+2x$. Naći vrednost priraštaja i njegovog glavnog dela kad se x promeni od vrednosti 2 na 2,1.

880. Koliki priraštaj dobija funkcija $y=3x^2-x$ pri promeni nezavisno promenljive od vrednosti $x=1$ do vrednosti $x=1,02$. Koliki je njen odgovarajući glavni deo, i koliki je odnos ovog poslednjeg prema prvoj veličini?

881. U nekoj tački x glavni deo priraštaja Δy funkcije $y=f(x)$, koji odgovara priraštaju $\Delta x=0,2$ nezavisno promenljive, iznosi 0,8. Naći vrednost izvoda funkcije u tački x .

882. Za funkcije $f(x)=x^2$ zna se da u nekoj tački priraštaju $\Delta x=0,2$ nezavisno promenljive odgovara glavni deo priraštaja funkcije: $df(x)=-0,8$. Naći početnu vrednost nezavisno promenljive.

883. Naći priraštaj i diferencijal funkcije $y=x^2-x$ za $x=10$ i $\Delta x=0,1$. Izračunati apsolutnu i relativnu grešku koja se čini pri zameni priraštaja diferencijalom. Nacrtati sliku.

884. Naći priraštaj i diferencijal funkcije $y=\sqrt{x}$ za $x=4$ i $\Delta x=0,41$. Izračunati apsolutnu i relativnu grešku. Nacrtati sliku.

885. Ako je $y=x^3-x$ izračunati Δy i dy za $x=2$ i $\Delta x=1$; $0,1$; $0,01$. Naći odgovarajuće vrednosti relativne greške $\delta = \frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|}$.

886. Naći grafički (po crtežu većeg razmera, nacrtanom na milimetarskom papiru) priraštaj i diferencijal i izračunati apsolutnu i relativnu grešku koja nastaje pri zameni priraštaja diferencijalom, za funkciju $y=2^x$, ako je $x=2$ i $\Delta x=0,4$.

887. Stranica kvadrata dugačka je 8 cm. Za koliko se poveća njegova površina ako mu svaku stranicu povećamo za: a) 1 cm; b) 0,5 cm; c) 0,1 cm. Naći glavni deo priraštaja površine ovog kvadrata i oceniti relativnu grešku (u procentima) koju činimo zamenjujući priraštaj njegovim glavnim delom.

888. Zna se da povećanjem stranice datog kvadrata za 0,3 cm glavni deo priraštaja njegove površine iznosi $2,4 \text{ cm}^2$. Naći glavni deo priraštaja površine koji odgovara povećanju svake njegove stranice za: a) 0,6 cm; b) 0,75 cm; c) 1,2 cm.

889. Naći diferencijal funkcije:

$$1) 0,25\sqrt{x}; \quad 2) \sqrt[3]{x}; \quad 3) \frac{1}{0,5x^2}; \quad 4) \frac{1}{4x^4}; \quad 5) \frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$6) \frac{1}{n\sqrt[n]{x}}; \quad 7) \frac{\sqrt{x}}{a+b}; \quad 8) \frac{p}{q^x}; \quad 9) \frac{m-n}{x^{0,2}}; \quad 10) \frac{m+n}{\sqrt{x}};$$

$$11) (x^2+4x+1)(x^2-\sqrt{x}); \quad 12) \frac{x^3+1}{x^3-1}; \quad 13) \frac{1}{1-t^2};$$

$$14) (1+x-x^2)^3; \quad 15) \text{tg}^2 x; \quad 16) 5^{\text{tg} x}; \quad 17) 2^{-\frac{1}{\cos x}};$$

$$18) \ln \text{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{4} \right); \quad 19) \frac{\cos x}{1-x^2}; \quad 20) \sqrt{\arcsin x} + (\arctg x)^2;$$

$$21) 3 \arcsin x - 4 \arctg x + \frac{1}{2} \arccos x - 3 \frac{1}{2} \arctg x;$$

$$22) 3 \frac{1}{x^2} + 3x^3 - 4\sqrt{x}.$$

890. Izračunati vrednost diferencijala funkcije: 1) $y = \frac{1}{(\text{tg} x + 1)^2}$ pri

promeni nezavisno promenljive od $x = \frac{\pi}{6}$ do $x = \frac{61\pi}{360}$ 2) $y = \cos^2 \varphi$ pri pro-

meni argumenta φ od 60° do $60^\circ 30'$; 3) $y = \sin 2\varphi$ pri promeni argumenta φ od $\frac{\pi}{6}$ do $\frac{61\pi}{360}$; 4) $y = \sin 3\varphi$ pri promeni argumenta od $\frac{\pi}{6}$ do $\frac{61\pi}{360}$;

5) $y = \sin \frac{\theta}{3}$ pri promeni argumenta θ od $\frac{\pi}{6}$ do $\frac{61\pi}{360}$.

891. Naći približnu vrednost priraštaja funkcije $y = \sin x$ pri promeni x od 30° do $30^\circ 1'$. Koliki je $\sin 30^\circ 1'$?

892. Naći približnu vrednost priraštaja funkcije $y = \operatorname{tg} x$ kad se x promeni od 45° do $45^\circ 10'$.

893. Naći približnu vrednost priraštaja funkcije $y = \frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$ kad se x

promeni od $\frac{\pi}{3}$ do $\frac{\pi}{3} + \frac{1}{100}$.

894. Naći $d\rho$ ako je $\rho = k\sqrt{\cos 2\varphi}$.

895. Ako je $y = 3^{1/x} + \frac{1}{2^{2x}} + 6^{\sqrt{x}}$ izračunati dy za $x = 1$ i $dx = 0,2$.

896. Izračunati približno $\sin 60^\circ 3'$, $\sin 60^\circ 18'$, i uporediti dobijene rezultate sa vrednostima iz tablica.

897. Pokazati da funkcija $y = \frac{1 + \ln x}{x - x \ln x}$ zadovoljava relaciju $2x^2 dy = (x^2 y^2 + 1) dx$.

898. Pokazati da funkcija y , definisana jednačinom $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, zadovoljava relaciju $x(dy - dx) = y(dy + dx)$.

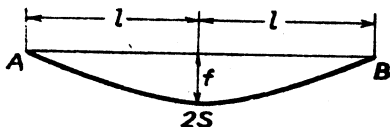
899. Ako je $f(x) = e^{0,1x(1-x)}$ izračunati približno vrednost $f(1,05)$.

900. Izračunati $\operatorname{arctg} 1,02$ i $\operatorname{arctg} 0,97$.

901. Izračunati približno $\sqrt{\frac{2,037^2 - 3}{2,037^2 + 5}}$.

902. Izračunati približno $\arcsin 0,4983$.

903. Ako je $2s$ dužina obešenog teškog konca (žice, lanca), l — polurazmak između tačaka vešanja, i f — veličina za koju se sredina konca spušta ispod horizontale (sl. 25), onda važi približna jednakost:



Sl. 25

$$s \approx l \left(1 + \frac{2}{3} \cdot \frac{f^2}{l^2} \right).$$

a) Izračunati za koliko se promeni dužina konca pri promeni veličine f za df .

b) Ako se uzme u obzir promena ds dužine žice (na primer usled promene temperature ili opterećenja), za koliko se promeni veličina f ?

904. Uporediti grešku pri određivanju ugla pomoću logaritamskih tablica iz njegova tangensa i iz njegova sinusa, tj. uporediti tačnost sa kojom se može naći ugao po obrascima $\lg \sin x = y$ i $\lg \operatorname{tg} x = z$, ako su y i z dati sa istom granicom greške.

905. U tehničkim proračunima često se skraćuju brojevi π i \sqrt{g} (g je ubrzanje zemljine teže) kad jedan od njih stoji u brojitelju a drugi u imeni- telju. Kolika je relativna greška koja nastaje ovim skraćivanjem?

906. Izraziti diferencijal posredne funkcije pomoću nezavisno promenljive i njenog diferencijala:

$$1) y = \sqrt[3]{x^2 + 5x}; \quad x = t^3 + 2t + 1; \quad 2) s = \cos^2 z, \quad z = \frac{z^2 - 1}{4};$$

$$3) z = \arctg v, \quad v = \frac{1}{\operatorname{tg} s}; \quad 4) v = 3^{-\frac{1}{x}}, \quad x = \ln \operatorname{tg} s;$$

$$5) s = e^z, \quad z = \frac{1}{2} \ln t, \quad t = 2u^2 - 3u + 1;$$

$$6) y = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}; \quad u = \arcsin v, \quad v = \cos 2s.$$

Diferencijabilnost funkcija

907. Funkcija $y = |x|$ je neprekidna za svako x . Uveriti se da za $x=0$ ona nije diferencijabilna.

908. Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $y = |x^3|$ u tački $x=0$.

909. Funkcija $f(x)$ definisana je ovako:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x & \text{za } x \leq 0, \\ x & \text{za } 0 < x < 1, \\ 2-x & \text{za } 1 \leq x \leq 2, \\ 3x-x^2 & \text{za } x > 2. \end{cases}$$

Ispitati neprekidnost funkcije $f(x)$ i razjasniti pitanje egzistencije i neprekidnosti njenog izvoda $f'(x)$.

910. Funkcija $|\sin x|$ je neprekidna za svako x . Uveriti se da za $x=0$ nije diferencijabilna. Ima li još vrednosti nezavisno promenljive za koje funkcija nije diferencijabilna?

911. Ispitati neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $e^{-|x|}$ za $x=0$.

912. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Je li ova funkcija diferencijabilna za $x=0$?

913. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Je li funkcija $f(x)$ za $x=0$ neprekidna i diferencijabilna?

914. Data je funkcija $f(x) = 1 + \sqrt{(x-1)^2}$. Pokazati da za $x=1$ iz priraštaja funkcije nije moguće izdvojiti glavni deo proporcionalan priraštaju nezavisno promenljive, i zato funkcija $f(x)$ nema izvoda za $x=1$. Protumačiti rezultat geometrijski.

915. $f(x) = x \arctg \frac{1}{x}$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Je li ova funkcija za $x=0$ neprekidna? A da li je diferencijabilna? Protumačiti rezultat geometrijski.

916. $f(x) = \frac{x}{1 + e^{1/x}}$ za $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Je li ova funkcija za $x = 0$ neprekidna? A da li je diferencijabilna?

§ 4. Izvod kao brzina menjanja veličine (dalji primeri)

Relativna brzina

917. Tačka se kreće po Arhimedovoj spirali $\rho = a\varphi$. Naći brzinu menjanja potega ρ u odnosu na ugao φ .

918. Tačka se kreće po logaritamskoj spirali $\rho = e^{a\varphi}$. Naći brzinu menjanja potega ako se zna da mu je ugaona brzina obrtanja ω .

919. Tačka se kreće po krugu $\rho = 2r \cos \varphi$. Naći brzine menjanja apscise i ordinate tačke ako se poteg obrće ugaonom brzinom ω (polarna osa se poklapa sa apscisnom osom, a pol sa koordinatnim početkom).

920. Krug poluprečnika R kotrlja se bez klizanja po pravoj tako da mu se centar kreće konstantnom brzinom v . Naći brzine menjanja apscise x i ordinate y tačke koja leži na krugu.

921. Barometarski pritisak p menja se sa visinom h prema sledećem obrascu:

$$\ln \frac{p}{p_0} = ch,$$

u kojem smo sa p_0 označili normalan pritisak. Na visini od 5540 m pritisak je $\frac{1}{2} p_0$; naći brzinu menjanja barometarskog pritiska sa promenom visine.

922. Promenljive x i y vezane su sledećom relacijom: $y^2 = 12x$. Ako se argument x povećava konstantnom brzinom od 2 jedinice u sekundi, kolika je brzina menjanja promenljive y za $x = 3$?

923. Ordinata tačke koja opisuje krug $x^2 + y^2 = 25$ opada brzinom od 1,5 cm/sec. Kojom se brzinom menja apscisa tačke u trenutku kad je njena ordinata 4 cm?

924. U kojoj tački elipse $16x^2 + 9y^2 = 400$ ordinata opada istom brzinom kojom apscisa raste?

925. Stranica kvadrata se povećava brzinom v . Kolika je brzina menjanja obima i površine kvadrata u trenutku kad mu je stranica $= a$?

926. Poluprečnik kruga se menja brzinom v . Kolika je brzina menjanja dužine kružne linije i površine kruga u trenutku kad mu je poluprečnik $= r$?

927. Poluprečnik lopte se menja brzinom v . Kojom se brzinom menja zapremina i površina lopte?

928. Koliki mora biti ugao u trenutku kad se vrednost njegova sinusa menja dva puta sporije nego što se menja sam ugao?

929. Za koju će vrednost ugla brzine menjanja njegova sinusa i tangensa biti iste?

930. Ako se brzina raćenja sinusa uveća n puta, koliko će se puta promeniti brzina menjanja tangensa?

931. Ako se predpostavi da je zapremina stabla drveta proporcionalna trećem stepenu njegova prečnika i da se prečnik ravnomerno uvećava iz godine u godinu, pokazati da je brzina menjanja zapremine stabla kad mu je prečnik 90 cm, 25 puta veća nego kad mu je prečnik 18 cm.

Funkcije definisane parametarski

932. Kako se može proveriti da li tačka određena Dekartovim koordinatama leži na krivoj zadatoj jednačinama u parametarskom obliku? a) Leži li tačka (5,1) na krugu $x=2+5\cos t$, $y=-3+5\sin t$? b) Leži li tačka $(2, \sqrt{3})$ na krugu $x=2\cos t$, $y=2\sin t$?

933. Nacrtati pomoću pojedinih tačaka grafike funkcijâ definisanih u parametarskom obliku:

- a) $x = 3 \cos t$, $y = 4 \sin t$;
- b) $x = t^2 - 2t$, $y = t^2 + 2t$;
- c) $x = \cos t$, $y = t + 2 \sin t$;
- d) $x = 2^{t-1}$, $y = \frac{1}{4}(t^3 + 1)$.

934. Iz jednačina koje u parametarskom vidu definišu funkciju eliminisati parametar:

- 1) $x = 3t$, $y = 6t - t^2$; 2) $x = \cos t$, $y = \sin 2t$;
- 3) $x = t^3 + 1$, $y = t^2$; 4) $x = \varphi - \sin \varphi$, $y = 1 - \cos \varphi$;
- 5) $x = \operatorname{tg} t$, $y = \sin 2t + 2 \cos 2t$.

935. Naći vrednost parametra koja odgovara datoj tački krive, čija je jednačina zadata u parametarskom vidu:

- 1) $x = 3(2 \cos t - \cos 2t)$, $y = 3(2 \sin t - \sin 2t)$; $(-9, 0)$;
- 2) $x = t^2 + 2t$, $y = t^3 + t$; $(3, 2)$;
- 3) $x = 2 \operatorname{tg} t$, $y = 2 \sin^2 t + \sin 2t$; $(2, 2)$;
- 4) $x = t^2 - 1$, $y = t^3 - t$; $(0, 0)$.

U zadacima 936 — 945 naći izvod funkcije y po x :

- 936. $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$.
- 937. $x = a \cos^3 \varphi$, $y = b \sin^3 \varphi$.
- 938. $x = a(\varphi - \sin \varphi)$, $y = a(1 - \cos \varphi)$.
- 939. $x = 1 - t^2$, $y = t - t^3$.
- 940. $x = \frac{t+1}{t}$, $y = \frac{t-1}{t}$.
- 941. $x = \ln(1+t^2)$, $y = t - \operatorname{arctg} t$.

$$942. x = \varphi(1 - \sin \varphi), \quad y = \varphi \cos \varphi.$$

$$943. x = \frac{1+t^3}{t^2-1}, \quad y = \frac{t}{t^2-1}.$$

$$944. x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t.$$

$$945. x = \frac{3at}{1+t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

U zadacima 946 — 949 naći ugaone koeficijente tangenata za date krive:

$$946. x = 3 \cos t, \quad y = 4 \sin t \text{ u tački } \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 2\sqrt{2} \right).$$

$$947. x = t - t^4, \quad y = t^2 - t^3 \text{ u tački } (0, 0).$$

$$948. x = t^3 + 1, \quad y = t^2 + t + 1 \text{ u tački } (1, 1).$$

$$949. x = 2 \cos t, \quad y = \sin t \text{ u tački } \left(1, -\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

950. Dati najprostije geometrijsko tumačenje parametra t za krivu datu jednačinama u parametarskom obliku:

$$1) \begin{cases} x = \cos t + t \sin t - \frac{t^2}{2} \cos t; \\ y = \sin t - t \cos t - \frac{t^2}{2} \sin t; \end{cases}$$

$$2) \quad x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t;$$

$$3) \quad x = a \cos t \sqrt{2 \cos 2t}, \quad y = a \sin t \sqrt{2 \cos 2t}.$$

951. Proveriti da li funkcija zadana parametarski jednačinama

$$x = 2t + 3t^2, \quad y = t^2 + 2t^3,$$

zadovoljava relaciju $y = y'^2 + 2y'^3$ (y' označava izvod funkcije y po x , tj.

$$y' = \frac{dy}{dx}).$$

952. Proveriti da li funkcija zadana parametarski jednačinama

$$x = \frac{1+t}{t^3}, \quad y = \frac{3}{2t^2} + \frac{2}{t},$$

zadovoljava jednačinu

$$xy'^3 = 1 + y' \quad \left(y' = \frac{dy}{dx} \right).$$

953. Proveriti da li funkcija zadana parametarski jednačinama

$$x = \operatorname{ch} 2t, \quad y = \operatorname{sh} 2t,$$

zadovoljava jednačinu

$$yy' - x = 0 \quad \left(y' = \frac{dy}{dx} \right).$$

954. Proveriti da li funkcija zadana parametarski jednačinama

$$x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \ln \frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}, \quad y = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},$$

zadovoljava jednačinu

$$y\sqrt{1+y'^2} = y' \left(y' = \frac{dy}{dx} \right).$$

955. Proveriti da li funkcija zadana parametarski jednačinama

$$x = \frac{1 + \ln t}{t^2}, \quad y = \frac{3 + 2 \ln t}{t},$$

zadovoljava jednačinu

$$yy' = 2xy'^2 + 1 \left(y' = \frac{dy}{dx} \right).$$

956. Naći ugao pod kojim se seku krive:

$$1) \begin{cases} y = x^2 \text{ i} \\ x = \frac{5}{3} \cos t, \quad y = \frac{5}{4} \sin t; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x = a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi \text{ i} \\ x = \frac{at^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{at\sqrt{3}}{1+t^2} \end{cases}$$

957. Pokazati da u svakom položaju kruga — generatora cikloide tangenta i normala u odgovarajućoj tački cikloide prolaze kroz najvišu i najnižu tačku pomenutog kruga.

958. Naći dužinu tangente, normale, subtangente i subnormale krive (kardioide)

$$x = a(2 \cos t - \cos 2t), \quad y = a(2 \sin t - \sin 2t)$$

u proizvoljnoj tački.

959. Naći dužinu tangente, normale, subtangente i subnormale krive (astroide)

$$x = a \sin^3 t, \quad y = a \cos^3 t$$

u proizvoljnoj njenoj tački.

960. Pokazati računski (ne grafički) da je tangenta kruga $x^2 + y^2 = a^2$ istovremeno i normala krive (evolvente kruga)

$$x = a(\cos t + t \sin t), \quad y = a(\sin t - t \cos t).$$

961. Naći dužine tangente, normale, subtangente i subnormale evolvente kruga (njenu jednačinu vidi u prethodnom zadatku).

962. Dokazati da odsečak svake normale krive

$$x = 2a \sin t + a \sin t \cos^2 t, \quad y = -a \cos^3 t,$$

koji leži između koordinatnih osa, ima dužinu $2a$.

U zadacima 963 — 966 sastaviti jednačine tangente i normale datih krivih u datim tačkama.

963. $x = 2e^t$; $y = e^{-t}$ za $t = 0$.

964. $x = \sin t$, $y = \cos 2t$ za $t = \frac{\pi}{6}$.

965. $x = 2 \ln \operatorname{ctg} t + 1$; $y = \operatorname{tg} t + \operatorname{ctg} t$ za $t = \frac{\pi}{4}$.

966. 1) $x = \frac{3at}{1+t^2}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^2}$ za $t = 2$;

2) $\begin{cases} x = t(t \cos t - 2 \sin t) \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t) \end{cases}$ za $t = \frac{\pi}{4}$;

3) $x = \sin t$, $y = a^t$ za $t = 0$.

967. Pokazati da su tangente kardioide (vidi zad. 958), povučene u bilo kojim dvema tačkama koje odgovaraju vrednostima parametra t , koje se razlikuju za $\frac{2}{3}\pi$, — paralelne.

968. Dokazati da: ako su \overline{OT} i \overline{ON} normale povučene iz koordinatnog početka na tangentu i normalu u bilo kojoj tački astroide (vidi zad. 959), onda je $4 \cdot \overline{OT}^2 + \overline{ON}^2 = a^2$.

969. Naći odstojanje p koordinatnog početka od tangente krive

$$2x = a(3 \cos t + \cos 3t),$$

$$2y = a(3 \sin t + \sin 3t).$$

i pokazati da je $4\rho^2 = 3p^2 + 4a^2$ (ρ je poteg tačke na krivoj).

Brzina menjanja potega

970. Dat je krug $\rho = 2r \sin \varphi$; naći ugao θ između potega i tangente, kao i ugao α između polarne ose i tangente.

971. Pokazati da zbir uglova koje tangenta u proizvoljnoj tački parabole $\rho = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ zaklapa sa potegom te tačke i sa polarnom osom iznosi π ; koristeći ovu osobinu parabole konstruisati njenu tangentu.

972. Data je kriva $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ (konhoida); pokazati da je $\alpha = 4\theta$ (oznake su iste kao i u zadatku 970).

973. Pokazati da se parabole $\rho = a \sec^2 \frac{\varphi}{2}$ i $\rho = b \operatorname{cosec}^2 \frac{\varphi}{2}$ seku pod pravim uglom.

974. Naći tangens ugla između polarne ose i tangente krive $\rho = a \sec^2 \varphi$ u tački čiji je poteg $\rho = 2a$.

975. Naći tangens ugla između polarne ose i tangente u koordinatnom početku: 1) krive $\rho = \sin^3 \varphi$; 2) krive $\rho = \sin 3\varphi$.

976. Pokazati da se dve kardioide $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ i $\rho = a(1 - \cos \varphi)$ seku pod pravim uglom.

977. Parametarske jednačine krive u polarnom koordinatnom sistemu su $\rho = f_1(t)$, $\varphi = f_2(t)$; izraziti tangens ugla θ između tangente i potega u zavisnosti od t .

978. Kriva je data jednačinama $\rho = at^3$, $\varphi = bt^2$. Naći ugao između potega i tangente.

979. Data je elipsa $x = a \cos t$, $y = b \sin t$. Izraziti poteg ρ i polarni ugao φ kao funkcije parametra t . Koristeći dobijene rezultate izračunati ugao između tangente i potega.

Polarnom subtangentom naziva se projekcija odsečka tangente od tačke dodira M do njenog preseka N sa normalom na poteg tačke M , povučenom iz pola polarnog sistema, — na tu normalu (dakle duž ON). Analogno ovom se definiše i *polarna subnormala*. Uzimajući u obzir ove definicije rešiti zadatke 980 — 984.

980. Izvesti obrazac za dužinu polarne subtangente i polarne subnormale krive $\rho = f(\varphi)$.

981. Pokazati da je dužina polarne subtangente hiperbolične spirale $\rho = \frac{a}{\varphi}$ konstantna.

982. Pokazati da je dužina polarne subnormale Arhimedove spirale $\rho = a\varphi$ konstantna.

983. Naći dužinu polarne subtangente logaritamske spirale $\rho = a^\varphi$.

984. Naći dužinu polarne subnormale logaritamske spirale $\rho = a^\varphi$.

Brzina menjanja dužine luka krive

U zadacima 985 — 999 sa s je obeležena dužina luka odgovarajuće krive.

985. Prava $y = ax + b$; $\frac{ds}{dx} = ?$

986. Krug $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{ds}{dx} = ?$

987. Elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $\frac{ds}{dy} = ?$

988. Parabola $y^2 = 2px$; $ds = ?$

989. Semikubna parabola $y^2 = ax^3$; $\frac{ds}{dy} = ?$

990. Sinusoida $y = \sin x$; $ds = ?$

991. Lančanica $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ($y = \operatorname{ch} x$); $\frac{ds}{dx} = ?$

992. Krug $x=r \cos t, y=r \sin t; \frac{ds}{dt}=?$

993. Cikloida $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t); \frac{ds}{dt}=?$

994. Astroida $x=a \cos^3 t, y=a \sin^3 t; ds=?$

995. Arhimedova spirala $x=at \sin t, y=a t \cos t; ds=?$

996. Kardioda $\begin{cases} x=a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y=a(2 \sin t - \sin 2t); \end{cases} ds=?$

997. Traktrisa

$$x=a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right); \quad y=a \sin t; \quad ds=?$$

998. Evolventa kruga

$$x=a(\cos t + t \sin t); \quad y=a(\sin t - t \cos t); \quad \frac{ds}{dt}=?$$

999. Hiperbola $x=a \operatorname{ch} t; y=a \operatorname{sh} t; ds=?$

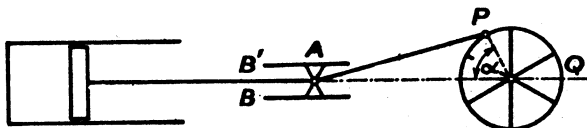
Brzina kretanja

1000. Merdevine dugačke 10 m jednim svojim krajem prislonjene su uza zid, a drugim se oslanjaju o pod. Donji kraj merdevina udaljava se od zida brzinom od 2 m/sec; kolika je brzina spuštanja gornjeg kraja u trenutku kad je donji udaljen od zida za 6 m? Kako je usmeren vektor brzine?

1001. Voz i vazdušni balon polaze istog trenutka i sa istog mesta. Voz se kreće brzinom od 50 km/čas, a balon se uzdiže (takođe ravnomerno) brzinom od 10 km/čas. Kojom se brzinom oni udaljavaju jedan od drugog? Kako je usmeren vektor brzine?

1002. Čovek visok 1,7 m udaljava se brzinom od 6,34 km/čas od svetlosnog izvora koji se nalazi na visini od 3 m. Kojom se brzinom kreće senka njegove glave?

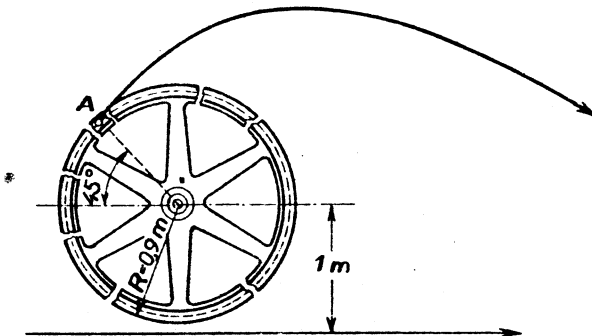
1003. Konj trči po kružnoj stazi brzinom od 20 km/čas. U centru kruga nalazi se svetiljka, a po tangenti kruga u tački od koje konj počinje da trči, postavljena je ograda. Kojom se brzinom kreće senka konja duž ograde u trenutku kad je pretrčao $\frac{1}{8}$ staze?



Sl. 26

1004. Na slici 26 predstavljen je šematski klipni mehanizam parne mašine, pri čemu je: A — ukrсна glava, AP — radilica, Q — zamajac. Zamajac se obrće ravnomerno ugaonom brzinom ω , poluprečnik mu je R , a dužina radilice je l . Kojom se brzinom kreće ukrсна glava u trenutku kad je zamajac obrnut za ugao α ?

1005. Zamajac se rasprsnuo u momentu kad se okretao brzinom od 80 obrta u minuti. Poluprečnik zamajca je 0,9 m, a centar mu leži na visini od 1 m od poda. Koliku će brzinu imati odlomak označen na slici 27 slovom A u trenutku pada na zemlju.



Sl. 27

§ 5. Izvodi višeg reda

Funkcije definisane implicitno

1006. $y = x^2 - 3x + 2$; $y' = ?$

1007. $y = 1 - x^2 - x^4$; $y''' = ?$

1008. $f(x) = (x + 10)^6$; $f'''(2) = ?$

1009. $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; $f^{IV}(1) = ?$

1010. $y = (x^2 + 1)^3$; $y'' = ?$

1011. $y = \cos^2 x$; $y''' = ?$

1012. $f(x) = e^{2x-1}$; $f''(0) = ?$

1013. $f(x) = \arctg x$; $f'''(1) = ?$

1014. $f(x) = \frac{1}{1-x}$; $f^V(x) = ?$

1015. $y = x^3 \ln x$; $y^{IV} = ?$

1016. $f(x) = \frac{a}{x^a}$; $y''(x) = ?$

1017. $\rho = a \sin 2\varphi$; $\frac{d^4 \rho}{d\varphi^4} = ?$

1018. $y = \frac{1-x}{1+x}$; $y^{(n)} = ?$

U zadacima 1019—1028 naći izvode drugog reda datih funkcija.

1019. $y = xe^{x^2}$.

1020. $y = \frac{1}{1+x^3}$.

1021. $y = (1+x^2) \arctg x$.

1022. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

1023. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$.

1024. $y = \frac{1}{a + \sqrt{x}}$.

1025. $y = e^{\sqrt{x}}$

1026. $y = \sqrt{1-x^2} \arcsin x$.

1027. $y = \arcsin(a \sin x)$.

1028. $y = x^x$.

U zadacima 1029—1040 izvesti opšti obrazac za izvod n -tog reda datih funkcija.

$$1029. y = e^{ax}.$$

$$1030. y = e^{-x}.$$

$$1031. y = \sin ax + \cos bx.$$

$$1032. y = \sin^2 x.$$

$$1033. y = xe^x.$$

$$1034. y = x \ln x.$$

$$1035. y = \frac{1}{ax+b}.$$

$$1036. y = \ln(ax+b).$$

$$1037. y = \log_a x.$$

$$1038. y = \frac{1}{x^2-1}.$$

$$1039. y = \frac{1}{x^2-3x+2}.$$

$$1040. y = \sin^4 x + \cos^4 x.$$

1041. Dokazati da funkcija $y = (x^2-1)^n$ zadovoljava relaciju

$$(x^2-1)y^{(n+2)} + 2xy^{(n+1)} - n(n+1)y^{(n)} = 0.$$

1042. Uveriti se da funkcija $y = e^x \sin x$ zadovoljava relaciju $y'' - 2y' + 2y = 0$, a funkcija $y = e^{-x} \sin x$ — relaciju $y'' + 2y' + 2y = 0$.

1043. Uveriti se da funkcija $y = \frac{x-3}{x+4}$ zadovoljava relaciju $2y'^2 = (y-1)y''$.

1044. Uveriti se da funkcija $y = \sqrt{2x-x^2}$ zadovoljava relaciju $y^3 y'' + 1 = 0$.

1045. Uveriti se da funkcija $y = e^{4x} + 2e^{-x}$ zadovoljava relaciju $y''' - 13y' - 12y = 0$.

1046. Uveriti se da funkcija $y = e^{\sqrt{x}} + e^{-\sqrt{x}}$ zadovoljava relaciju $xy'' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{4}y = 0$.

1047. Uveriti se da funkcija $y = \cos e^x + \sin e^x$ zadovoljava relaciju $y'' - y' + ye^{2x} = 0$.

1048. Uveriti se da funkcija

$$y = A \sin(\omega t + \omega_0) + B \cos(\omega t + \omega_0)$$

(A, B, ω, ω_0 — konstante) zadovoljava relaciju

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega^2 y = 0.$$

1049. Uveriti se da funkcija

$$a_1 e^{nx} + a_2 e^{-nx} + a_3 \cos nx + a_4 \sin nx$$

(a_1, a_2, a_3, a_4, n — konstante) zadovoljava relaciju $\frac{d^4 y}{dx^4} = n^4 y$.

1050. Uveriti se da funkcija

$$y = \sin(n \arcsin x)$$

zadovoljava relaciju

$$(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0.$$

1051. Pokazati da funkcija $e^{\alpha \cdot \arcsin x}$ zadovoljava relaciju

$$(1-x^2)y'' - xy' - \alpha^2 y = 0.$$

1052. Pokazati da funkcija $y = (x + \sqrt{x^2 + 1})^k$ zadovoljava relaciju

$$(1+x^2)y'' + xy' - k^2 y = 0.$$

1053. Dokazati da se izraz

$$S = \frac{y'''}{y'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y''}{y'} \right)^2$$

ne menja ako se u njemu zameni y sa $\frac{1}{y}$, tj. ako se stavi $y = \frac{1}{y_1}$, onda je

$$\frac{y_1'''}{y_1'} - \frac{3}{2} \left(\frac{y_1''}{y_1'} \right)^2 = S.$$

1054. Neka je $y = f(x)$. Izraziti $\frac{d^2 x}{dy^2}$ pomoću $\frac{dy}{dx}$ i $\frac{d^2 y}{dx^2}$ i pokazati da se formula $R = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$ može transformisati na oblik

$$R^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\left(\frac{d^2 x}{dy^2}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

1055. Neka je $F(x) = f(x) \cdot \varphi(x)$, i uz to $f'(x) \cdot \varphi'(x) = C$. Dokazati da je

$$\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{2C}{f \cdot \varphi} \quad \text{i} \quad \frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{\varphi'''}{\varphi}.$$

Funkcije definisane implicitno

1056. $b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

1057. $x^2 + y^2 = r^2$; $\frac{d^3 y}{dx^3} = ?$ 1058. $y = \operatorname{tg}(x+y)$; $\frac{d^3 y}{dx^3} = ?$

1059. $s = 1 + te^s$; $\frac{d^2 s}{dt^2} = ?$ 1060. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$; $y'' = ?$

1061. $y = \sin(x+y)$; $y'' = ?$ 1062. $e^{x+y} = xy$; $y'' = ?$

1063. Izvesti obrazac za drugi izvod funkcije inverzne datoj funkciji $y = f(x)$.

1064. $e^y + xy = e$; naći $y''(x)$ za $x = 0$.

1065. $y^2 = 2px$; eliminisati izvode iz izraza $k = \frac{y''}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1066. Uveriti se da iz $x^2 + y^2 = R^2$ sledi $k = \frac{1}{R}$, gde je $k = \frac{|y''|}{\sqrt{(1+y'^2)^3}}$.

1067. Dokazati da: ako je

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2gx + 2fy + h = 0,$$

onda je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + g}{bx + cy + f} \quad \text{i} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{A}{(bx + cy + f)^3},$$

pri čemu je A konstanta u odnosu na x i y .

1068. Dokazati da ako je

$$(a + bx)e^{\frac{y}{x}} = x,$$

onda je:

$$x^3 \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)^2.$$

Funkcije definisane parametarski

1069. $x = at^2,$ $y = bt^3;$ $\frac{d^2 x}{dy^2} = ?$

1070. $x = a \cos t,$ $y = a \sin t;$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

1071. $x = a \cos t,$ $y = b \sin t;$ $\frac{d^3 y}{dx^3} = ?$

1072. $x = a(\varphi - \sin \varphi),$ $y = a(1 - \cos \varphi);$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

1073. 1) $x = a \cos^3 t$ $y = a \sin^3 t;$ $\frac{d^3 y}{dx^3} = ?$

2) $x = a \cos^2 t,$ $y = a \sin^2 t;$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

1074. 1) $x = \ln t,$ $y = t^2 - 1;$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

2) $x = \operatorname{arcsin} t,$ $y = \ln(1 - t^2);$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

1075. $x = at \cos t,$ $y = at \sin t;$ $\frac{d^2 y}{dx^2} = ?$

1076. Uveriti se da funkcija $y = f(x)$ definisana parametarski jednačinama $y = e^t \cos t,$ $x = e^t \sin t$ zadovoljava relaciju $y''(x+y)^2 = 2(xy' - y)$.

1077. Uveriti se da funkcija $y=f(x)$, zadana parametarski jednačinama $y=3t-t^3$, $x=3t^2$, zadovoljava relaciju $36y''(y-\sqrt{3x})=x+3$.

1078. Uveriti se da funkcija zadana parametarski jednačinama

$$x = \sin t \quad \text{i} \quad y = \sin kt,$$

zadovoljava relaciju

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} + k^2 y = 0.$$

1079. Dokazati da ako je $x=f(t) \cos t - f'(t) \sin t$, $y=f(t) \sin t + f'(t) \cos t$, onda je $ds^2 = dx^2 + dy^2 = [f(t) + f''(t)]^2 dt^2$.

Ubrzano kretanje

1080. Tačka se kreće pravolinijski tako da je $s = \frac{4}{3}t^3 - t + 5$. Naći ubrzanje a na kraju druge sekunde (s je izraženo u metrima, a t u sekundama).

1081. Telo se kreće pravolinijski po obrascu $s = t^2 - 4t + 1$. Naći njegovu brzinu i ubrzanje.

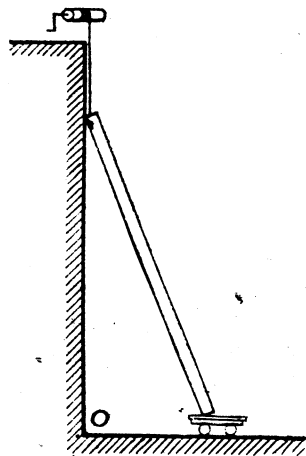
1082. Tačka se kreće pravolinijski tako da je $s = \frac{2}{9} \sin \frac{\pi t}{2} + s_0$. Naći ubrzanje na kraju prve sekunde (s je izraženo u metrima a t u *sec*).

1083. Tačka se kreće pravolinijski tako da je $s = \sqrt{t}$. Uveriti se da je kretanje usporeno i da je ubrzanje a proporcionalno trećem stepenu brzine v .

1084. Tešku gredu dugačku 13 m spuštaju na zemlju tako da je njen donji kraj pričvršćen za vagonet (sl. 28), a gornji je vezan užetom namotan na vratilo. Uže se odmotava brzinom od 2 m/min. Kojom se brzinom kotrlja vagonet u trenutku kad je udaljen od tačke 0 za 5 m?

1085. Šlep čija je paluba za 4 m niža od nivoa pristaništa, privlače užetom koje se namotava na vratilo brzinom od 2 m/sec. Kolika će biti brzina kretanja šlepa u trenutku kad njegovo horizontalno odstojanje od pristaništa bude 8 m?

1086. Tačka se kreće pravolinijski tako da joj je brzina proporcionalna kvadratnom korenu iz pređenog puta. Pokazati da se kretanje vrši pod dejstvom konstantne sile.



Sl. 28

1087. Dokazati da: ako je sila koja deluje na materijalnu tačku obrnuto proporcionalna brzini kretanja tačke, onda je kinetička energija tačke linearna funkcija vremena.

Lajbnicova formula

1088. Primeniti Lajbnicovu formulu pri izračunavanju izvoda:

$$1) [(x^2 + 1) \sin x]^{(20)}; \quad 2) (e^x \sin x)^{(n)}; \quad 3) (x^3 \sin \alpha x)^{(n)}.$$

1089. Pokazati da: ako je $y = (1-x)^{-\alpha} e^{-\alpha x}$ onda je

$$(1-x) \frac{dy}{dx} = \alpha xy.$$

Primenom Lajbnicove formule pokazati da je

$$(1-x) y^{(n+1)} - (n + \alpha x) y^{(n)} - n \alpha y^{(n-1)} = 0.$$

1090. Funkcija $y = e^{\alpha \arcsin x}$ zadovoljava relaciju

$$(1-x^2) y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$$

(vidi zadatak 1051). Primenom Lajbnicove formule i diferenciranjem jednačine n puta pokazati da je

$$(1-x^2) y'' - xy' - \alpha^2 y = 0$$

1091. Pokazati da je

$$(e^{ax} \cos bx)^{(n)} = r^n e^{ax} \cos (bx + n\varphi),$$

pri čemu je $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$.

Koristeći Lajbnicovu formulu izvesti sledeće obrasce

$$r^n \cos n\varphi = a^n - C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^4 a^{n-4} b^4 - \dots,$$

$$r^n \sin n\varphi = C_n^1 a^{n-1} b - C_n^3 a^{n-3} b^3 + C_n^5 a^{n-5} b^5 - \dots$$

1092. Dokazati da je

$$\left(x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right)^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}};$$

1093. Pokazati da funkcija $y = \arcsin x$ zadovoljava relaciju

$$(1-x^2) y'' = xy'.$$

Primenjujući na obe strane ove jednačine Lajbnicovu formulu naći $y^{(n)}(0)$ ($n \geq 2$).

1094. Primenjujući Lajbnicovu formulu n puta uzastopno pokazati da funkcija

$$y = \cos (m \arcsin x)$$

zadovoljava relaciju

$$(1-x^2) y^{(n+2)} - (2n+1) xy^{(n+1)} + (m^2 - n^2) y^{(n)} = 0.$$

1095. Ako je $y = (\arcsin x)^2$, onda je

$$(1-x^2) y^{(n+1)} - (2n-1) xy^{(n)} - (n-1)^2 y^{(n-1)} = 0.$$

Naći $y'(0)$, $y''(0)$, ..., $y^{(n)}(0)$.

Diferencijali višeg reda

1096. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $d^2 y = ?$ 1097. $y = x^m$; $d^3 y = ?$

1098. $y = (x+1)^3 (x-1)^2$; $d^2 y = ?$

1099. $y = 4^{-x^2}$; $d^2 y = ?$

1100. $y = \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} x \right)$; $d^2 y = ?$ 1101. $y = \sqrt{\ln^2 x - 4}$; $d^2 y = ?$

1102. $y = \sin^2 x$; $d^3 y = ?$

1103. $\rho^2 \cos^3 \varphi - a^2 \sin^3 \varphi = 0$; $d^2 \rho = ?$

1104. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $d^2 y = ?$

1105. $y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x = \operatorname{tg} t$; izraziti $d^2 y$ pomoću: 1) x i dx , 2) t i dt .

1106. $y = \sin z$; $z = a^x$; $x = t^3$; izraziti $d^2 y$ pomoću: 1) z i dz , 2) x i dx ,
3) t i dt .

(Ova stranica je ostavljena prazna)

REZULTATI

428. a) 5; b) 5. 429. a) $v = 0,25 \frac{m}{sek}$; b) $v = 0,55 \frac{m}{sek}$; c) $\frac{t_1 + t_2}{1200} \frac{m}{sek}$.

430. 75,88; 60,85; 49,03; 48,05.

431. $53,9 \frac{m}{sek}$; $49,49 \frac{m}{sek}$; $49,25 \frac{m}{sek}$; $49,005 \frac{m}{sek}$; $v_9 = 49,0 \frac{m}{sek}$; $v_{10} = 98,0 \frac{m}{sek}$; $v = 9,8 \frac{m}{sek}$.

432. a) $4 \frac{g}{cm}$; b) $40 \frac{g}{cm}$; c) $4l \frac{g}{cm}$, pri čemu je l dužina odsečka AM .

433. 1) $95 \frac{g}{cm}$; 2) a) $35 \frac{g}{cm}$; b) $5 \frac{g}{cm}$; c) $185 \frac{g}{cm}$.

434. 1) $1,002 \frac{kal}{g \cdot grad} = 4198 \frac{dž}{kg \cdot grad}$; 2) $1,013 \frac{kal}{g \cdot grad}$.

435*. Uvesti srednju ugaonu brzinu, a zatim prelazom na graničnu vrednost dobiti traženu veličinu.

438. $k = \frac{f'(t)}{f(t)}$, pri čemu je k koeficijent linearne dilatacije.

439. $K = S \frac{\varphi'(P)}{\varphi(P)}$. 440. 1) 56; 2) 19; 3) 7,625; 4) 1,261.

441. 1) 4,52; 2) -0,249; 3) 0,245. 442. a) 6,5; b) 6,1; c) 6,01; d) 6,001.

443. $f'(5) = 10$; $f'(-2) = -4$; $f'\left(-\frac{3}{2}\right) = -3$. 444. 3; 0; 6; $\frac{1}{3}$.

445. $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. 446. Za funkciju $f(x) = x^3$ ne važi. 447. 1.

448. 0,4343. 449. 2,303. 450. Granična vrednost je $f'(x)$.

453. 1) $5x^4$; 2) $10x^9$; 3) $\frac{3}{7}x^{-\frac{4}{7}}$; 4) $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; 5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; 6) $-\frac{3}{x^4}$; 7) $-\frac{1}{x^2}$;

8) $-\frac{3}{5x\sqrt{x^3}}$; 9) $\frac{5x^4}{4}$; 10) $3,5x^4$; 11) x^{11} ; 12) $\frac{7a}{x^3}$; 13) $\frac{1}{n\sqrt{x^{n-1}}}$;

14) $\frac{p}{x^2}$; 15) $-\frac{2}{3}ax^{-\frac{5}{3}}$

454. 1) 0; 2) 6; 3) -4; 4) $k_1 = 2$, $k_2 = -4$.

455. (1, 1); (-1, -1). 456. 1) (0, 0); 2) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$. 457. Ne može.

458. $\alpha_1 = \arctg \frac{1}{7}$, $\alpha_2 = \arctg \frac{1}{13}$. 459. $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_2 = \arctg \frac{3}{4}$.

460. $\arctg 3$. 461. $y = 12x - 16$; $x + 12y - 98 = 0$; subtangenta $-\frac{2}{3}$, subnormala 96.

462. Za $x = 0$ i za $x = \frac{2}{3}$.

463. 1) (2, 4); 2) $\left(-\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$; 3) (-1, 1) i $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}\right)$.

466. 1) $6x - 5$; 2) $4x^3 - x^2 + 5x - 0,3$; 3) $2ax + b$; 4) $\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

5) $\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$; 6) $\frac{0,2}{4} - 10y^2 - \frac{0,4}{y^3}$; 7) $\frac{1}{n} - \frac{n}{x^2} + \frac{2x}{m^2} - \frac{2m^2}{x^3}$;

$$8) \frac{3}{2} m \sqrt{x} + \frac{7}{6} n \sqrt[6]{x} + \frac{1}{2} p \frac{1}{\sqrt{x^3}}; \quad 9) \frac{2mz+n}{p+q};$$

$$10) -\frac{1}{15} t^{-\frac{5}{3}} + 7,28 t^{-2,4} - \frac{0,5}{t \sqrt{t}}; \quad 11) 2x-1;$$

$$12) 3,5x^2 \sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}; \quad 13) 3v^2 + 2v - 1; \quad 14) 6(a-x);$$

$$15) \frac{2ax}{a+b} + \frac{b}{a+b} - \frac{c}{(a+b)x^2}; \quad 16) \frac{3m(mu+n)^2}{p^3}.$$

$$467. f(1)=1; f'(1)=2; f(4)=8; f'(4)=2,5; f(a^2)=3a^2-2|a|; f'(a^2)=3-\frac{1}{|a|}.$$

$$468. f(-1)=-5; f'(-1)=-8; f'(2)=\frac{19}{16}; f'\left(\frac{1}{a}\right)=3a^4+10a^2-a^2.$$

$$469. 13. \quad 471. 1) 4x^3-3x^2-8x+9; 2) 7x^6-10x^4+8x^3-12x^2+4x+3;$$

$$3) -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{x}\right); \quad 4) \frac{1}{9} \left(\frac{60}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^6} + \frac{\sqrt{3}}{x^3} - 48\sqrt[6]{27x^2}\right);$$

$$5) \frac{1+12x}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{9\sqrt[3]{x^2}+10x\sqrt[3]{x}+36x\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[3]{x^2}}; \quad 6) 2x(3x^4-28x^2+49);$$

$$7) \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+2\sqrt{2}x+2\sqrt{3}x+2\sqrt{6}x+3x\sqrt{6}}{2\sqrt{x}}$$

$$472. -\frac{2}{(x-1)^2}; \quad 473. \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}; \quad 474. \frac{3t^2-6t-1}{(t-1)^2}.$$

$$475. \frac{v^4+2v^3+5v^2-2}{(v^2+v+1)^2}; \quad 476. \frac{ab-bc}{(cx+d)^2}.$$

$$477. -\frac{4x}{3(x^2-1)^2} + 1 + 2x - 3x^2; \quad 478. \frac{2v^4(v^3-5)}{(v^3-2)^2}; \quad 479. \frac{6x^2}{(x^3+1)^2}.$$

$$480. -\frac{6x^2}{(x^3-1)^2}; \quad 481. \frac{2v-1}{a^2-3}; \quad 482. -\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}; \quad 483. -\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2}.$$

$$484. \frac{3-2t}{(t^2-3t+6)^2}; \quad 485. \frac{4x^2(2b^2-x^2)}{(b^2-x^2)^2}; \quad 486. \frac{1+2x+3x^2-2x^3-x^4}{(1+x^2)^2}.$$

$$487. \frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2}; \quad 488. \frac{a+2bx}{m(a+bm)}.$$

$$489. \frac{a^2 b^2 c^2 [(x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) + x-a](x-b)}{(x-a)^2 (x-b)^2 (x-c)^2}.$$

$$490. f'(0)=0; f'(1)=6; \quad 491. F'(0)=11; F'(1)=2; F'(2)=-1.$$

$$492. F'(0)=-\frac{1}{4}; F'(-1)=-\frac{1}{2}; \quad 493. s'(0)=-\frac{3}{25}; s'(2)=-\frac{17}{15}.$$

$$494. y'(1) = 16; \quad y'(a) = 15a^2 + \frac{2}{a^3} - 1. \quad 495. \rho'(2) = \frac{5}{9}; \quad \rho'(0) = 1.$$

$$496. \varphi'(1) = -\frac{a+1}{4}. \quad 497. z'(0) = 1.$$

$$498. 1) 4x^3 - 3x^2(a+b+c+d) + 2x(ab+ac+ad+bc+bd+cd) - (abc+abd+acd+bcd); \quad 2) 8x(x^2+1)^3; \quad 3) -20(1-x)^{10};$$

$$4) 60(1+2x)^{20}; \quad 5) -20x(1-x^2)^2; \quad 6) 5(15x^2+2x)(5x^3+x^2-4)^4;$$

$$7) 6(3x^2-1)(x^2-x)^2; \quad 8) 6\left(14x + \frac{4}{x^2}\right)\left(7x^2 - \frac{4}{x} + 6\right)^5;$$

$$9) 4\left(3t^2 + \frac{3}{t^2}\right)\left(t^3 - \frac{1}{t^2} + 3\right)^3; \quad 10) -\frac{4(x+1)}{(x-1)^2};$$

$$11) \frac{3(x^2+2x-1)(1+x)^2}{(1+x)^4}; \quad 12) 24(x^2+x+1)(2x^3+3x^2+6x+1)^2.$$

$$499. \frac{(s+2)(s+4)}{(s+3)^2}; \quad 500. \frac{(3-t)t^2}{(1-t)^2}; \quad 501. \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{2x})^2}.$$

$$502. \frac{4}{3\sqrt[3]{4x^2(1+\sqrt[3]{2x})^2}}; \quad 503. \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}; \quad 504. \frac{4(1-2\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}.$$

$$505. \frac{m v^{m-1}}{(1-v)^{m+1}}; \quad 506. \frac{4(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}; \quad 507. \frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}.$$

$$508. \frac{2x}{3\sqrt[3]{(1+x^2)^4}}; \quad 509. \frac{2x^3+4x^7}{\sqrt{(1-x^4-x^2)^3}}; \quad 510. \frac{3-x}{2\sqrt{(1-x)^3}}.$$

$$511. \frac{x(x^2+2a^2)}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}; \quad 512. \frac{v + \sqrt{a^2+v^2}}{a^2\sqrt{a^2+v^2}}.$$

$$513. \frac{2}{3\sqrt{(2x-1)^4}} - \frac{15x}{4\sqrt{(x^2+2)^2}}; \quad 514. u'(1) = 9.$$

$$515. y'(2) = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad 517. \cos x - \sin x; \quad 518. \frac{1 - \cos x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}.$$

$$519. \frac{x - \sin x \cdot \cos x}{x^2 \cos^2 x}; \quad 520. \varphi \cos \varphi; \quad 521. (\alpha \cos \alpha - \sin \alpha) \left(\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\sin^2 \alpha}\right).$$

$$522. \frac{1}{1 + \cos t}; \quad 523. \frac{\sin x + \cos x + x(\sin x - \cos x)}{1 + \sin 2x}.$$

$$524. \frac{(1 + \operatorname{tg} x)(\sin x + x \cos x) - x \sin x \sec^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2}; \quad 525. -\sin 2x.$$

$$526. \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x; \quad 527. -\sin^3 x; \quad 528. \frac{3}{2} \sin 2x(2 - \sin x); \quad 529. \operatorname{tg}^4 x.$$

$$530. 2x \frac{\sin x}{\cos^2 x}; \quad 531. -\frac{16 \cos 2x}{\sin^3 2x}; \quad 532. 3 \cos 3x; \quad 533. -\frac{a}{3} \sin \frac{x}{3}.$$

$$534. 9 \cos(3x+5). \quad 535. \frac{1}{2 \cos^2 \frac{x+1}{2}}. \quad 536. \frac{1}{\sqrt{1+2 \operatorname{tg} x \cdot \cos^2 x}}$$

$$537. -\frac{\cos \frac{1}{x}}{x^2} \quad 538. \cos(\sin x) \cos x. \quad 539. -12 \cos^2 4x \sin 4x.$$

$$540. \frac{1}{4 \sqrt{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \cos^2 \frac{x}{2}} \quad 541. \frac{x \cos \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$542. -\frac{2x}{3 \sin^2 \sqrt{1+x^2} \cdot \sqrt{(1+x^2)^2}} \quad 543. 4(1+\sin^2 x)^3 \sin 2x.$$

$$544. \frac{x^2-1}{2x^2 \cos^2 \left(x + \frac{1}{x}\right) \sqrt{1 + \operatorname{tg} \left(x + \frac{1}{x}\right)}} \quad 545. \frac{\sin \left(2 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}$$

$$546. -3 \sin 3x \sin(2 \cos 3x). \quad 548. \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$549. \frac{\pi}{2(\arccos x^2 \sqrt{1-x^2})} \quad 550. \frac{2 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \quad 551. \arcsin x.$$

$$552. \frac{1}{(\arcsin x)^2 \sqrt{1-x^2}} \quad 553. \sin x \cdot \operatorname{arctg} x + x \cos x \cdot \operatorname{arctg} x + \frac{x \sin x}{1+x^2}$$

$$554. -\frac{x + \arccos x \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}} \quad 555. \frac{\operatorname{arctg} x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} \quad 556. 0.$$

$$557. \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad 558. -\frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \quad 559. \frac{\sqrt{1-x^2} + x \arcsin x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$560. \frac{2x}{\operatorname{arctg} x} - \frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg} x)^2} \quad 561. \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$$562. -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}} \quad 563. \frac{2x}{1+x^4} \quad 564. \frac{2}{|x| \sqrt{x^2-4}}$$

$$565. \frac{\cos x}{|\cos x|} \quad 566. -\frac{2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{1+x^2} \quad 567. \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{1-(\arccos x)^2}}$$

$$568. \frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x)}}$$

$$569. \frac{x+1}{4 \sqrt{(\arcsin \sqrt{x^2+2x})^3 \sqrt{(1-2x-x^2)(x^2+2x)}}$$

$$570. \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha \cos x} \quad 571. \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a + b \cos x} \quad 572. \frac{1}{2(1 + x^2)}$$

$$573. 2x \log_3 x + \frac{x}{\ln 3} \quad 574. \frac{2 \ln x}{x} \quad 575. \frac{\ln x + 1}{\ln 10} \quad 576. \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

$$577. \frac{x \ln x - x + 1}{x \ln^2 x} \ln 2 \quad 578. \sin x \ln x + x \cos x \ln x + \sin x$$

$$579. \frac{1}{x \ln^2 x} \quad 580. \frac{1 - n \ln x}{x^{n+1}} \quad 581. \frac{2}{x(1 + \ln x)^2}$$

$$582. \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2} \quad 583. x^{n-1}(n \ln x + 1) \quad 584. \frac{\ln x}{x\sqrt{1 + \ln^2 x}}$$

$$585. \frac{2}{1 - 2x} \quad 586. \frac{2x - 4}{x^2 - 4x} \quad 587. \operatorname{ctg} x \quad 588. \frac{2x}{(x^2 - 1) \ln 3}$$

$$589. \frac{2}{\sin 2x} \quad 590. \frac{2}{\arccos 2x\sqrt{1 - 4x^2}} \quad 591. 4 \ln^3 \sin x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$592. \frac{a}{(ax + b)[1 + \ln^2(ax + b)]} \quad 593. n(1 + \ln \sin x)^{n-1} \operatorname{ctg} x$$

$$594. \frac{1}{x \log_3 x \log_3(\log_3 x) \ln 2 \ln 3 \ln 5}$$

$$595. \frac{x}{\operatorname{arctg} \sqrt{1 + x^2} (2 + x^2) \sqrt{1 + x^2}} \quad 596. \frac{6x^2 \arcsin[\ln(a^3 + x^3)]}{(a^3 + x^3)\sqrt{1 - \ln^2(a^3 + x^3)}}$$

$$597. \frac{\operatorname{ctg} \frac{x+3}{4}}{12 \sqrt[3]{\ln^2 \sin \frac{x+3}{4}}} \quad 598. 2^x \ln 2 \quad 599. 10^x \ln 10 \quad 600. \frac{\ln 3}{3^x}$$

$$601. 4^{-x}(1 - x \ln 4) \quad 602. 10^x(1 + x \ln 10) \quad 603. e^x(1 + x)$$

$$604. \frac{1-x}{e^x} \quad 605. \frac{2^x(\ln 2 - 1) + 3x^2 - x^3}{e^x} \quad 606. e^x(\cos x - \sin x)$$

$$607. \frac{e^x}{\sin^2 x} (\sin x - \cos x) \quad 608. \frac{\sin x + \cos x}{e^x} \quad 609. \frac{(\ln x - 1) \ln 2}{\ln^2 x} 2^{\frac{x}{\ln x}}$$

$$610. 3x^2 - 3^x \ln 3 \quad 611. \frac{e^x}{2\sqrt{1 + e^x}} \quad 612. e^x(x^2 + 1) \quad 613. \frac{2e^x}{(1 - e^x)^2}$$

$$614. -\frac{2 \cdot 10^x \ln 10}{(1 + 10^x)^2} \quad 615. \frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \quad 616. e^x(\cos x + \sin x + 2x \cos x)$$

$$617. -e^{-x} \quad 618. 2 \cdot 10^{2x-3} \ln 10 \quad 619. \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{2\sqrt{x+1}} \quad 620. 2^x \ln 2 \cdot \cos(2^x)$$

$$621. 3 \sin x \cos x \cdot \ln 3 \quad 622. 3 \sin^2 x \cos x \cdot a^{\sin^3 x} \ln a \quad 623. \frac{2e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1 - 4x^2}}$$

624. $2^{3x} \cdot 3^x \ln 2 \cdot \ln 3$. 625. $\frac{e^{\sqrt{\ln x}}}{2x \sqrt{\ln x}}$.
626. $\cos(e^{x^2+3x-2}) e^{x^2+3x-2} (2x+3)$.
627. $-12 \cdot 10^{1-\sin^2 3x} \ln 10 \cdot \sin^2 3x \cos 3x$.
628. $\frac{(2ax+b)e^{\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}}{2(ax^2+bx+c)\sqrt{\ln(ax^2+bx+c)}}$.
629. $\frac{\sqrt[3]{\operatorname{ctg} \sqrt{\operatorname{arctg}(e^{3x})} \cdot e^{3x}}}{(1+e^{6x})\sqrt{[\operatorname{arctg}(e^{3x})]^2}}$ 630. $-2ab^2 x e^{-b^2 x^2}$
631. $\frac{2}{a^2} x e^{\frac{-x^2}{a^2}} (a^2 - x^2)$. 632. $Ae^{-k^2 x} [\omega \cos(\omega x + \alpha) - k^2 \sin(\omega x + \alpha)]$.
633. $a^x x^a \left(\frac{a}{x} + \ln a\right)$. 634. $3 \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch} x$. 635. $\operatorname{th} x$. 636. $\frac{1}{\operatorname{ch} 2x}$.
637. $-\frac{2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)}$ 638. $2 \operatorname{sh} 2x$. 639. $\operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \operatorname{ch} x$. 640. $\frac{\operatorname{sh} x}{2\sqrt{\operatorname{ch} x}}$.
641. $e^{\operatorname{ch}^2 x} \operatorname{sh} 2x$. 642. $\frac{1}{x \operatorname{ch}^2(\ln x)}$. 643. $x \operatorname{ch} x$ 644. $\frac{3 \operatorname{th} x}{4\sqrt{2 \operatorname{ch}^2 x \sqrt{1+\operatorname{th}^2 x}}}$.
645. $\frac{1}{4 \operatorname{ch}^4 \frac{x}{2}}$ 646. $\frac{1}{2\sqrt{\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x}}$ 647. $\frac{1}{1 - \operatorname{sh}^4 x}$.
648. $\frac{x(4 + \sqrt{x}) \operatorname{sh} 2x + 2(2x^2 \sqrt{x} - 1) \operatorname{ch} 2x}{2x^2}$.
649. $\frac{x e^{3x}}{\operatorname{sh}^2 x} [(3x+2) \operatorname{sh} x - x \operatorname{ch} x]$.
650. $x^{x^2+1} (2 \ln x + 1)$. 651. $x^{x^x} \cdot x^x \left(\ln^2 x + \ln x + \frac{1}{x}\right)$.
652. $(\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln \sin x\right)$. 653. $(\ln x)^x \left(\frac{1}{\ln x} + \ln \ln x\right)$.
654. $2\sqrt[3]{(x+1)^2} \left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$.
655. $x^2 e^{x^2} \sin 2x (3 + 2x^2 + 2x \operatorname{ctg} 2x)$. 656. $-\frac{2(x-2)(x^2+11x+1)}{3(x-5)^4 \sqrt[4]{(x+1)^2}}$.
657. $2x^{\ln x - 1} \ln x$. 658. $\frac{57x^2 - 302x + 361}{20(x-2)(x-3)} \cdot \frac{(x+1)^2 \sqrt{x-2}}{5\sqrt{(x-3)^2}}$.
659. $\frac{1}{2} \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}} \left(\frac{1}{x} + \operatorname{ctg} x - \frac{1}{2} \cdot \frac{e^x}{1-e^x}\right)$.

$$660. \frac{1}{\sqrt{1-x^2} [(\arcsin x)^2 - 1]} \sqrt{\frac{1 - \arcsin x}{1 + \arcsin x}}. \quad 661. x^{\frac{1}{2}-2} (1 - \ln x).$$

$$662. x^{\sin x} \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x} \right). \quad 663. \left(\frac{x}{x+1} \right)^x \left(\frac{1}{x+1} + \ln \frac{x}{x+1} \right)$$

$$664. x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}} (2 + \ln x). \quad 665. (x^2+1)^{\sin x} \left[\frac{2x \sin x}{x^2+1} + \cos x \ln(x^2+1) \right]$$

$$666. \frac{x^4+6x^2+1}{3x(1-x^4)} \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}. \quad 667. \frac{(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x^3}}$$

$$668. \frac{a}{k \cos^2 \left(\frac{x}{k} + b \right)}. \quad 669. \frac{p}{2\sqrt{1+\sqrt{2px}} \sqrt{2px}}$$

$$670. \frac{2x-3}{1+(x^2-3x+2)^2}. \quad 671. \frac{1+\sin x}{(x-\cos x) \ln 10}. \quad 672. \frac{3}{2} \sin 2x (\cos x - 2).$$

$$673. \sec^2 \frac{x}{5}. \quad 674. \frac{1+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x} \sqrt{(x+\sqrt{x})^4}}$$

$$675. 2 \sin \frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos \frac{x}{2} \sin 2x. \quad 676. e^{\cos x} (\cos x - \sin^2 x).$$

$$677. \frac{x^2(7x^2-40)}{\sqrt{(x^2-8)^3}}. \quad 678. e^{-x^2} \left(\frac{1}{x} - 2x \ln x \right).$$

$$679. \frac{5(x-1)}{x\sqrt{x}} \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^9. \quad 680. -\frac{1}{1+x^2}. \quad 681. 2x^2 e^{2x+1}.$$

$$682. \frac{2 \sin 2x}{\cos^2 2x}. \quad 683. \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}. \quad 684. \frac{2(x \cos x + \sin x)}{x^2 \sin^2 x}.$$

$$685. \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \sin \frac{2x}{3} - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{x}{3} \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{2}. \quad 686. \frac{4(31x^3+18)}{27x^2 \sqrt{(4x^3+2)^2}}$$

$$687. \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}. \quad 688. \operatorname{arctg} \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2(1+x)}$$

$$689. \frac{\operatorname{tg} x (1+2 \operatorname{tg}^2 x)}{\cos^2 x \sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}}. \quad 690. \frac{\cos 2x}{x} - 2 \sin 2x \ln x.$$

$$691. \frac{1+x^4}{1+x^2}. \quad 692. \frac{n \cos x}{\sqrt{1-n^2 \sin^2 x}}. \quad 693. \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}$$

$$694. \sin^2 3x \cos^2 3x. \quad 695. \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 696. -\frac{1}{2} \sin \frac{\arcsin x}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$697. \frac{1+2\sqrt{x}+4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}} \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}. \quad 698. \frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}}$$

$$699. \frac{\ln x - 2}{x^2} \sin \left[2 \left(\frac{1 - \ln x}{x} \right) \right]. \quad 700. \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \ln 3}.$$

$$701. -\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}. \quad 702. -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}(x+\sqrt{1-x^2})}.$$

$$703. \arcsin(\ln x) + \frac{1}{\sqrt{1-\ln^2 x}}. \quad 704. -\frac{2e^x}{(1+e^x)^2} \operatorname{sech}^2 \left(\frac{1-\sqrt{e^x}}{1+e^x} \right).$$

$$705. -\frac{2 \sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}.$$

$$706. -0,8 \left(\cos \frac{2x+1}{2} - \sin 0,8x \right) \left(\sin \frac{2x+1}{2} + 0,8 \cos 0,8x \right).$$

$$707. 10^{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{\sqrt{x}}{2} \ln 10 \right). \quad 708. -\frac{4}{\operatorname{tg} 2x \sin^2 2x}.$$

$$709. -\frac{1}{(x^2+2x+2) \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}}. \quad 710. -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$711. \frac{x+2}{2\sqrt{x+3}\sqrt{(1+x\sqrt{x+3})^2}}. \quad 712. \frac{x(8+9\sqrt{x})}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}.$$

$$713. \frac{\sin 2x}{2\sqrt{(1+\sin^2 x)^3}}. \quad 714. 3x^2 \operatorname{arctg} x^3 + \frac{3x^3}{1+x^6}.$$

$$715. \frac{\operatorname{ctg} x \ln \cos x + \operatorname{tg} x \ln \sin x}{\ln^2 \cos x}. \quad 716. \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$717. \frac{4}{(1-4x)^2} \left(\sqrt{\frac{1-4x}{1+4x}} + \arcsin 4x \right). \quad 718. -\frac{e^{\ln x}}{x \ln^2 x}. \quad 719. \frac{1}{e^{x-\frac{1}{2}}}.$$

$$720. 10^{x \operatorname{tg} x} \ln 10 \left(\operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x} \right).$$

$$721. 2 \sin x (x \sin x \cos x^2 + \cos x \sin x^3). \quad 722. \frac{2 \sin x}{\cos 2x \sqrt{\cos 2x}}.$$

$$723. \frac{2-3x-x^3}{2(1-x)(1+x^2)} \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}. \quad 724. \frac{x^2}{1-x^4}. \quad 725. 2^{\frac{x}{\ln x}} \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ln 2.$$

$$726. \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}. \quad 727. -\frac{2(2\cos^2 x + 1)}{\sin^2 2x}. \quad 728. -\frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}.$$

$$729. \sqrt{\frac{a-x}{a+x}}. \quad 730. \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}. \quad 731. -\cos 2x. \quad 732. \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}.$$

$$733. (a^2+1) \sin x e^{ax}. \quad 734. e^{1-\cos x} (1+x \sin x).$$

$$735. \frac{2e^{-2x}}{(1+e^{-4x})(\operatorname{arctg} e^{-2x})^2}. \quad 736. 10 e^x \sin 3x. \quad 737. 9x^2 \arcsin x.$$

$$738. \frac{e^{-\sqrt{x}}}{4\sqrt{x}\sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}. \quad 739. \frac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}.$$

$$740. \frac{(\cos x - \sin' x)(e^x + e^{-x})}{e^x \cos x + e^{-x} \sin x}. \quad 741. \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$742. \frac{\sin(x - \cos x) \cdot (1 + \sin x)}{\cos^2(x - \cos x)}. \quad 743. e^x \sin x \cos^3 x (1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x).$$

$$744. \frac{54\sqrt{x^4}}{11\sqrt[5]{(9+6\sqrt{x^2})^{10}}}. \quad 745. \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+4e^x+1}}.$$

$$746. \frac{e^{\operatorname{arctg} \sqrt{1+\ln(2x+3)}}}{(2x+3)[2+\ln(2x+3)]\sqrt{1+\ln(2x+3)}}.$$

$$747. \frac{e^{x^2}}{(e^x + e^{-x})^2} [2x(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})]. \quad 748. \frac{\ln(1+\sin x)}{\sin^2 x}.$$

$$749. \frac{40}{2x-3\sqrt{1-4x^2}}. \quad 750. \frac{x^3+1}{x^4(x^2+1)}. \quad 751. \frac{x^2}{\sqrt{1-2x-x^2}}.$$

$$752. \frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} + \operatorname{ctg} x. \quad 753. \frac{(1+2x^2)\sin x + x(1+x^2)\cos x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$754. \frac{(x^2-32x-73)(3-x)^3}{2(x+1)^6\sqrt{x+2}}. \quad 755. \frac{3e^{\sqrt{x}}(2+\sqrt{x})}{10\sqrt[5]{(1+xe^{\sqrt{x}})^2}}.$$

$$756. \left(2x - \frac{1}{1+x^2}\right) \frac{e^{x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \ln x + 1}}{\sqrt{x}}. \quad 757. \frac{1}{\cos^3 x}.$$

$$758. \frac{e^x \operatorname{arctg} x}{\ln^3 x} \left[1+x + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} - \frac{5}{\ln x}\right].$$

$$759. \frac{(1-x^2)e^{3x-1}\cos x}{(\arccos x)^3} \left[\frac{3-2x-3x^2}{1-x^2} - \operatorname{tg} x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}\arccos x}\right].$$

$$760. 4\sqrt{(x^2+a^2)^3}. \quad 761. (\arcsin x)^2. \quad 762. \frac{e^{-x}-e^x}{e^{-x}+e^x}.$$

$$763. \frac{1}{ae^{mx}+be^{-mx}}. \quad 764. \frac{1}{x^3+1}. \quad 765. \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

$$766. (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} \left(\frac{4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\sin 4x} - \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right).$$

$$767. \frac{3x^2 + 10x + 20}{15(x^2 + 4)^3 \sqrt{(x-5)^2 \sqrt{x^2 + 2}}} \quad 768. \frac{1}{x^4 + x^2 + 1}$$

$$769. \frac{2nx^{n-2}}{x^{2n} + 1}, \text{ ako je } n\text{-paran broj, i } \frac{2nx^n}{|x|(x^{2n} + 1)}, \text{ ako je } n \text{ neparan broj.}$$

$$770. \frac{24x^3}{(1+8x^3)^2} \quad 774. \text{ a) } \frac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2};$$

$$\text{b) } \frac{2-n(n+1)x^{n-1} + 2(n^2-1)x^n - n(n-1)x^{n+1}}{(1-x)^3}. \text{ Uputstvo; iskoristiti obrazac za zbir } x + x^2 + \dots + x^n.$$

$$776. \sqrt{1-y^2} e^{-\arcsin y} \text{ i } \frac{\cos \ln x}{x} \quad 777. \frac{1}{3(s^2-1)} \quad 779. \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

$$780. \alpha'(y) = \frac{1}{y[1 + \ln \alpha(y)]} \quad 781. (\text{Arsh } x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}};$$

$$(\text{Arch } x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}; \text{ Arth } x' = \frac{1}{1-x^2} \quad 782. \frac{e^t}{1-t}$$

$$783. \frac{-(1+x^2)^2}{8x^3}; -\frac{1}{2\sqrt{(1-y)^2(1+y)^2}} \quad 784. \frac{1}{3y^2-4}$$

$$785. \frac{1}{2^s \ln 2} \sqrt{1-2^{2s}}, \frac{1}{\ln 2} \text{ctg } t \quad 789. y \div f(x) = \sin^2 x$$

$$790. y = \pm \sqrt{1-x^2} \quad 791. -\frac{1}{4} \quad 792. -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

$$793. -\sqrt{\frac{y}{x}} \quad 794. \frac{ay-x^2}{y^2-ax} \quad 795. \frac{3a^2 \cos 3x + y^2 \sin x}{2y \cos x}$$

$$796. \frac{2a}{3(1-y^2)} \quad 797. \frac{y}{y-x} \quad 798. \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2-2x^2}{2y^2-x^2}$$

$$799. \frac{3x^2 + 2axy + by^2}{ax^2 + 2bxy + 3y^2} \quad 800. -\frac{y \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}{x \cos^2(x+y)(\cos(xy) - \sin(xy)) - 1}$$

$$801. 2x-y \frac{2y-1}{1-2x} \quad 802. \frac{1}{2(1+\ln y)} \quad 803. \frac{\sqrt{1-y^2}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}(1-\sqrt{1-y^2})}$$

$$804. \frac{y^2 - xy \ln y}{x^2 - xy \ln x} \quad 805. -\frac{\sin(x+y)}{1 + \sin(x+y)} \quad 806. -\frac{1 + y \sin(xy)}{x \sin(xy)}$$

$$807. -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \quad 808. \frac{e^y}{2-y} \quad 809. \frac{\sin y}{2 \sin 2y - \sin y - x \cos y}$$

$$810. \frac{\sqrt{1-k^2}}{1+k \cos x} \quad 811. \frac{y \cos x + \sin(x-y)}{\sin(x-y) - \sin x} \quad 812. \frac{1+y^2}{y^2} \quad 814. (2, 4)$$

816. $y + 4x + 4 = 0$; $8y - 2x + 15 = 0$; vrednost subtangente je $\frac{1}{2}$, a subnormale -8 .

819. a) $t_1 = 0$, $t_2 = 8$; b) $t_1 = 0$, $t_2 = 4$, $t_3 = 8$.

820. $181,5 \cdot 10^3 \text{ erg}$. 821. $\omega = 13 \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$. 822. $\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$.

823. $\omega = (2at - b) \frac{\text{rad}}{\text{sek}}$; brzina će biti jednaka nuli posle $t = \frac{b}{2a} \text{ sek}$.

824. 23 A.

825. $(0,0)$; $(1,1)$; $(2,0)$. 827. $(1,0)$; $(-1, -4)$. 828. $y = 2x - 2$; $y = 2x + 2$.

829. $3x + y + 6 = 0$.

830. Tangenta $y - y_0 = \cos x_0 (x - x_0)$; normala $y - y_0 = -\sec x_0 (x - x_0)$.

831. Tangenta $x_0 (y - y_0) = x - x_0$; normala $(y - y_0) + x_0 (x - x_0) = 0$.

832. Tangenta $x + 2y = 4a$; normala $y = 2x - 3a$.

833. Tangenta $y - y_0 = \frac{x_0^2 (3a - x_0)}{y_0 (2a - x_0)^2} (x - x_0)$;
normala $y - y_0 = -\frac{y_0 (2a - x_0)^2}{x_0^2 (3a - x_0)} (x - x_0)$.

835. Subtangente imaju respektivno vrednosti $\frac{x}{3}$, $\frac{2x}{3}$, $-2x$; subnormale: $-3x^2$, $-$

$\frac{3x}{2}$ i $\frac{1}{2x}$.

836. $y = \frac{x_0}{2a} \left(x - \frac{x_0}{2} \right)$; $y - y_0 = -\frac{2a}{x_0} (x - x_0)$. 837. $2x - y + 1 = 0$.

838. $27x - 3y - 79 = 0$. 839. $2x - y - 1 = 0$.

840. $4x - 4y - 21 = 0$. 842. 3,75. 844. $x + 25y = 0$; $x + y = 0$.

845. $(0,1)$. 846. $y = x$. 848. $x - y - 3e^{-2} = 0$. 849. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

850. $\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right)$ 857. $2x - y \pm 1 = 0$.

858. Ako je $y = f(x)$ jednačina date krive, onda će jednačina traženog mesta biti: $y = xf'(x)$. a) Parabola $y^2 = \frac{1}{2}px$; b) prava, paralelna osi Ox , $y = \frac{1}{\ln b}$; b) Kapova kriva $y\sqrt{a^2 - x^2} + x^2 = 0$; g) krug $x^2 + y^2 = a$.

859. 1) $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \arctg \frac{18}{31}$; 2) $\arctg \frac{8}{15}$. 860. 1) $\arctg 3$, 2) 45° .

861. 90° . 862. 45 i 90° . 863. $\arctg 3$. 864. $\arctg(2\sqrt{2})$

865. Ako je n neparan broj tangenta je $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$, a normala $ax - by = a^2 - b^2$. Ako

je n paran broj tangente su $\frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = 2$, a normale $ax \pm by = a^2 - a^2$.

879. $\Delta y = 1,461$; $dy = 1,4$. 880. $\Delta y = 0,1012$; $dy = 0,1$; $\frac{dy}{\Delta y} = 0,9880$.

$$881. 4. \quad 882. -2. \quad 883. \Delta y = 1,91; dy = 1,9; \Delta y - dy = 0,01; \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0,0052$$

$$884. \Delta y = 0,1; dy = 0,1025; \Delta y - dy = -0,0025; \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = -0,025.$$

$$885. \begin{array}{l} \Delta x = 1, \\ \Delta y = 18, \\ dy = 11, \\ \Delta y - dy = 7, \\ \delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} = 0,39, \end{array} \begin{array}{l} 0,1 \\ 1,161, \\ 1,1, \\ 0,061, \\ 0,0526, \end{array} \begin{array}{l} 0,01 \\ 0,110601, \\ 0,11 \\ 0,000601, \\ 0,0055. \end{array}$$

$$886. \Delta y \approx 1,3; dy \approx 1,1; \Delta y - dy \approx 0,2; \delta = \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \approx 0,15.$$

$$887. a) dy = 16, \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \% = 5,88\%;$$

$$b) dy = 8, \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \% = 3,03\%;$$

$$c) dy = 1,6, \frac{\Delta y - dy}{\Delta y} \% = 0,62\%.$$

$$888. a) dy = 4,8 \text{ cm}^2; b) dy = 6,0 \text{ cm}^2; c) dy = 9,6 \text{ cm}^2.$$

$$889. 1) \frac{0,125}{\sqrt{x}} dx; 2) \frac{5 dx}{3\sqrt[3]{x^2}}; 3) -\frac{4 dx}{x^3}; 4) -\frac{dx}{x^3}; 5) -\frac{dx}{4x\sqrt{x}};$$

$$6) -\frac{dx}{3nx\sqrt{x}}; 7) \frac{dx}{2(n+b)\sqrt{x}}; 8) -\frac{p \ln q}{q^x} dx;$$

$$9) -\frac{0,2(m-n)}{x^{1,2}} dx; 10) -\frac{(m+n) dx}{2x\sqrt{x}}.$$

$$11) \left[(2x+4)(x^2-\sqrt{x}) + (x^2+4x+1) \left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \right] dx;$$

$$12) -\frac{6x^2 dx}{(x^3-1)^2}; 13) \frac{2t dt}{(t-t^2)^2}; 14) 3(1+x-x^2)^2(1-2x) dx;$$

$$15) \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx; 16) 5 \operatorname{tg} x \frac{2 \ln 5}{\sin 2x} dx; 17) -2 \frac{1}{\cos x} \ln 2 \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx;$$

$$18) -\frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2}}; 19) \frac{(x^2-1) \sin x + 2x \cos x}{(1-x^2)^2} dx;$$

$$20) \left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x} \sqrt{1-x^2}} + \frac{2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} \right) dx; 21) \left(\frac{5}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{1+x^2} \right) \frac{dx}{2};$$

$$22) \left(3 \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{x^3} \cdot \ln 3 + 9x^2 - \frac{2}{\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$890. 1) -0,0059; 2) -0,0075; 3) 0,0086; 4) 0; 5) 0,00287.$$

891. $\Delta y \approx 0,00025$; $\sin 30'1'' \approx 0,50025$ 892. 0,00582. 893. $-0,0693$.

894. $d\rho = -\frac{k \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} d\varphi$. 895. 0,3466. 896. $\sin 60'03'' = 0,8665$; $\sin 60'18'' = 0,8686$.

899. 0,995. 900. $\operatorname{arctg} 1,02 \approx 0,795$; $\operatorname{arctg} 0,97 \approx 0,770$. 901. 0,355. 902. 0,52164.

903. a) Promena dužine konca je $2ds = \frac{8f}{3l} df$; b) promena veličine f je: $df = \frac{3l}{4f} ds$.

904. Greška koja se čini pri određivanju ugla po njegovu sinusu je $\Delta x_s = \operatorname{tg} x \Delta y$; greška koja se čini pri određivanju ugla po njegovom tangensu: $\Delta x_T = \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \Delta z$ (pri tome su Δy i Δz greške sa kojima su date veličine y i z); $\frac{\Delta x_S}{\Delta x_T} = \frac{1}{\cos^2 x}$; tačnost sa kojom se može odrediti ugao pomoću logaritma njegova tangensa je veća nego li kod određivanja vrednosti ugla pomoću logaritama njegova sinusa.

905. 0,3%. 906. 1) $dy = \frac{(2t^3 + 4t + 7)(3t^2 + 2) dt}{3 \sqrt{[(t^3 + 2t + 1)(t^3 + 2t + 6)]^2}}$;

2) $ds = -\frac{t}{2} \sin \frac{t^2 - 1}{2} dt$; 3) $dz = -ds$; 4) $dv = \frac{2 \ln 3}{3 \int \operatorname{tg} x} \frac{ds}{\ln^2 \operatorname{tg} x}$;

5) $ds = \frac{(4u - 3) du}{2 \sqrt{2u^2 - 3u + 1}}$; 6) $dy = -\frac{2 ds}{\cos 2s}$.

908. Neprekidna i diferencijabilna.

909. $f(x)$ neprekidna svuda osim u tačkama $x=0$ i $x=2$; $f'(x)$ je definisan i neprekidan svuda osim u tačkama $x=0, 1, 2$ u kojima nije definisan.

910. Za $x = k\pi$; $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

911. Neprekidna, ali nije diferencijabilna. 912. $f'(0) = 0$.

913. Neprekidna, ali nije diferencijabilna.

914. Δy i Δx su beskonačno male veličine različitog reda.

915. Neprekidna, ali nije diferencijabilna. 916. Jeste; Nije. 917. a.

918. $a \omega e^{a\varphi}$. 919. Apscisa se menja brzinom $v_x = -2r\omega \sin 2\varphi$; ordinata se menja brzinom $v_y = 2r\omega \cos 2\varphi$.

920. Brzina menjanja apscise je $v_x = v(1 + \cos \varphi)$, a ordinate: $v_y = v \sin \varphi$, pri čemu je φ ugao između ordinatne ose i potega tačke.

921. $-\frac{p \ln 2}{5540} \approx -0,000125 p$.

922. $2 \frac{\operatorname{jed.}}{\operatorname{sec}}$ u tački (3; 6) i $-2 \frac{\operatorname{jed.}}{\operatorname{sek}}$ u tački (3; -6).

923. $2 \frac{\operatorname{cm}}{\operatorname{sek}}$ u tački (3; 4) i $-2 \frac{\operatorname{cm}}{\operatorname{sek}}$ u tački (-3, 4).

924. U tačkama $\left(3, \frac{16}{3}\right)$ i $\left(-3, -\frac{16}{3}\right)$.

925. $4v \frac{\operatorname{cm}}{\operatorname{sek}}$ i $2av \frac{\operatorname{cm}^2}{\operatorname{sek}}$. 926. $2\pi v$ i $2\pi r v$.

$$927. 4\pi r^2 v \text{ i } 8\pi r v \frac{\text{cm}^2}{\text{sek}}.$$

$$928. \text{ Za } x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{3} \text{ i za } x = 2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}.$$

$$929. \text{ Za } x = 2\pi k. \quad 930. \frac{1}{n^2} \text{ puta.} \quad 932. \text{ a) Da; b) ne.}$$

$$934. 1) x^2 - 18x + 9y = 0; \quad 2) y^2 = 4x^2(1-x^2); \quad 3) y^3 = (x-1)^2;$$

$$4) x = \text{Arccos}(1-y) \mp \sqrt{2y-y^2}; \quad 5) y = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}.$$

$$935. 1) t = (2k+1)\pi; \quad 2) t = 1; \quad 3) t = \frac{\pi}{4} + \pi k; \quad 4) t_1 = 1, t_2 = -1.$$

$$936. \frac{b}{a} \text{ ctg } \varphi. \quad 937. \frac{b}{a} \text{ tg } \varphi. \quad 938. \text{ ctg } \frac{\varphi}{2}. \quad 939. \frac{3t^2-1}{2t}.$$

$$940. -1. \quad 941. \frac{t}{2}. \quad 942. \frac{\cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{1 - \sin \varphi - \varphi \cos \varphi}. \quad 943. \frac{1+t^2}{t(2+3t-t^2)}.$$

$$944. \frac{1-\text{tg } t}{1+\text{tg } t}. \quad 945. \frac{t(2-t^2)}{1-2t^2}. \quad 946. -\frac{4}{3}. \quad 947. 0 \text{ i } \frac{1}{3}.$$

$$948. \text{ Ne postoji.} \quad 949. \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

$$950. 1) t = \frac{\pi}{2} + \alpha; \quad 2) t = \pi - \alpha; \quad 3) t = \frac{\pi}{6} + \frac{\alpha}{3}, \text{ gde je } \alpha \text{ ugao koji zaklapa tangenta}$$

sa x -osom.

$$956. 1) \text{ Krive se seku u dvema tačkama pod uglovima } \alpha_1 = \alpha_2 = \text{arctg } \frac{41}{2} \approx 87^\circ 12';$$

$$2) \text{ krive se seku u trima tačkama pod uglovima } \alpha_2 = \alpha_3 = 30^\circ \text{ i } \alpha_1 = 0^\circ.$$

$$958. \text{ Dužina tangente } T = \left| \frac{y}{\sin \frac{3}{2} t} \right|; \text{ dužina normale } N = \left| \frac{y}{\cos \frac{3}{2} t} \right|; \text{ dužina}$$

$$\text{subtangente } S_T = \left| y \text{ ctg } \frac{3}{2} t \right|; \text{ dužina subnormale } S_N = \left| y \text{ tg } \frac{3}{2} t \right|.$$

$$959. \left| \frac{y}{\cos t} \right|, \left| \frac{y}{\sin t} \right|, |y \text{ tg } t| \text{ i } |y \text{ ctg } t|.$$

$$961. \left| \frac{y}{\sin t} \right|, \left| \frac{y}{\cos t} \right|, |y \text{ ctg } t| \text{ i } |y \text{ tg } t|.$$

$$963. x+2y-4=0 \quad 2x-y-3=0. \quad 964. 4x+2y-3=0; \quad 2x-4y+1=0.$$

$$965. y=2, x=1. \quad 966. 1) 4x+3y-12a=0; \quad 3x-4y+6a=0;$$

$$2) x+y = \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{16}; \quad y-x = \frac{\pi \sqrt{2}}{2}; \quad 3) y = 1 + x \ln a.$$

$$969. p = 2a \cos t. \quad 970. \theta = \varphi, \alpha = 2\varphi. \quad 974. 3; -3. \quad 975. 1) 0; \quad 2) 0; \quad \sqrt{3}; -\sqrt{3}.$$

$$977. \frac{f_1(t) f_2(t)}{f(t)} = \text{tg } 0. \quad 978. \arctg \frac{2}{3} b t^2 = \arctg \frac{2}{3} \varphi.$$

$$979. \rho = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}; \quad \varphi = \arctg \left(\frac{b}{a} \text{tg } t \right) \text{ tangens ugla između tangente i polarne}$$

$$\text{ose ima vrednost } \frac{2ab}{(b^2 - a^2) \sin 2t}$$

$$980. \text{ Polarna subtangenta je } S_T = \frac{\rho^2}{\frac{d\rho}{d\varphi}}; \text{ polarna subnormala } S_N = \frac{d\rho}{d\varphi}.$$

$$983. \frac{f}{\ln a}. \quad 984. \rho \ln a. \quad 985. \sqrt{1+a^2}.$$

$$986. \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r}{y}. \quad 987. \frac{\sqrt{b^4 x^2 + a^4 y^2}}{b^2 x}.$$

$$988. \sqrt{1 + \frac{\rho}{2x}} dx \text{ ili } \frac{\sqrt{y^2 + \rho^2}}{y} dx. \quad 989. \sqrt{1 + \frac{4}{9ax}}.$$

$$990. \sqrt{1 + \cos^2 x} dx. \quad 991. \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y. \quad 992. r.$$

$$993. 2a \sin \frac{t}{2}. \quad 994. 3a \cos t \sin t dt. \quad 995. a \sqrt{1+t^2} dt.$$

$$996. 4a \sin \frac{t}{2} dt. \quad 997. a \text{ctg } t dt. \quad 998. at.$$

$$999. a \sqrt{\text{ch } 2t} dt.$$

$$1000. \frac{2}{3} \text{ m/min}; \text{ vektor brzine je usmeren vertikalno na dole.}$$

1001. $10 \sqrt{26} \approx 51 \text{ km/čas}$; vektor brzine je paralelan hipotenuzi pravouglog trougla čija je jedna kateta horizontalna i dugačka 50 km, a druga vertikalna i dugačka 10 km.

$$1002. 14,63 \text{ km/čas}. \quad 1003. 40 \text{ km/čas}.$$

$$1004. R \left(\sin \alpha + \frac{R \sin 2\alpha}{2 \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha}} \right). \quad 1005. 9,43 \text{ m/sek}. \quad 1006. 2.$$

$$1007. -24x. \quad 1008. 207360. \quad 1009. 360. \quad 1010. 6(5x^4 + 6x^2 + 1).$$

$$1011. 4 \sin 2x. \quad 1012. \frac{4}{e}. \quad 1013. \frac{1}{2}. \quad 1014. \frac{5!}{(1-x)^6}.$$

$$1015. \frac{6}{x}. \quad 1016. \frac{an(n+1)}{x^{n+2}}. \quad 1017. 16a \sin 2\varphi.$$

$$1018. \frac{2(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}. \quad 1019. 2e^{x^2} (3x + 2x^3). \quad 1020. \frac{6x(2x^3 - 1)}{(x^3 + 1)^3}.$$

$$1021. \frac{2x}{1+x^2} + 2 \arctg x. \quad 1022. \frac{a^2}{\sqrt{(a^2 - x^2)^3}}.$$

$$1023. \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad 1024. \frac{a+3\sqrt{x}}{4x\sqrt{x}(a+\sqrt{x})^3}$$

$$1025. \frac{e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)}{4x\sqrt{x}} \quad 1026. \frac{\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

$$1027. \frac{a(a^2-1)\sin x}{\sqrt{(1-a^2\sin^2 x)^3}} \quad 1028. x^x \left[(\ln x + 1)^2 + \frac{1}{x} \right]$$

$$1029. a^n e^{ax} \quad 1030. (-1)^n e^{-x}$$

$$1031. a^n \sin \left(ax + n \frac{\pi}{2} \right) + b^n \cos \left(bx + n \frac{\pi}{2} \right)$$

$$1032. 2^{n-1} \sin \left[2x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right] \quad 1033. e^x (x+n)$$

$$1034. (-1)^n \frac{(n-2)!}{x^{n-1}} \quad (n > 2) \quad 1035. \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

$$1036. \frac{(-1)^{n-1} a^n (n-1)!}{(ax+b)^n} \quad 1037. (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n \ln a}$$

$$1038. (-1)^n \frac{n!}{2} \left[\frac{1}{(x+1)^{n+1}} + \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

$$1039. (-1)^n n! \left[\frac{1}{(x-2)^{n+1}} - \frac{1}{(x-1)^{n+1}} \right]$$

$$1040. 4^{n-1} \cos \left(4x + n \frac{\pi}{2} \right) \quad 1054. \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx} \right)^3}$$

$$1056. \frac{b^4}{a^2 y^3} \quad 1057. \frac{3r^3 x}{y^5} \quad 1058. \frac{2(3y^4 + 8y^2 + 5)}{y^8}$$

$$1059. \frac{(3-s)e^{2s}}{(2-s)^3} \quad 1060. \frac{2a^3 xy}{(y^2 - ax)^2}$$

$$1061. \frac{y}{[1 - \cos(x+y)]^3} \quad 1062. \frac{y[(x-1)^2 + (y-1)^2]}{x^2(y-1)^3}$$

$$1063. \frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left(\frac{dy}{dx} \right)^3} \quad 1064. \frac{1}{e^2} \quad 1065. \frac{p^2}{\sqrt{y^2 + p^2}}$$

$$1069. \frac{2a}{9b^2 t^4} \quad 1070. \frac{a^2}{y^3} = \frac{1}{a \sin^3 t} \quad 1071. \frac{3b \cos t}{a^2 \sin^2 t}$$

$$1072. \frac{1}{a(1 - \cos \varphi)^2} \quad 1073. 1) \frac{\cos^2 t - 4 \sin^2 t}{9a^2 \cos^7 t \sin^2 t}; \quad 2) 0, \text{ pošto je } x+y=0.$$

$$1074. 1) 4t^2; \quad 2) \frac{2}{1-t^2} \quad 1075. \frac{2+t^2}{a(\cos t - t \sin t)^2}$$

$$1080. 16 \text{ m/sek}^3 \quad 1081. v = 2t - 4, a = 2 \quad 1082. \frac{\pi^2}{18} \text{ cm/sek}^2$$

$$1084. -0,0015 \text{ m/sek}^2. \quad 1085. -\frac{1}{8} \text{ m/sek}^2.$$

$$1088. 1) (x^2 - 379) \sin x - 40x \cos x; \quad 2) e^x \sum_{k=0}^n C_n^k \sin \left(x + k \frac{\pi}{2} \right);$$

$$3) \alpha^n x^3 \sin \left(\alpha x + n \frac{\pi}{2} \right) + 3n \alpha^{n-1} x^2 \sin \left[\alpha x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right] + \\ + 3n(n-1) \alpha^{n-2} x \sin \left[\alpha x + (n-2) \frac{\pi}{2} \right] + \\ + n(n-1)(n-2) \alpha^{n-3} \sin \left[\alpha x + (n-3) \frac{\pi}{2} \right].$$

$$1093. y^{(2n)}(0) = 0; \quad y^{(2n+1)}(0) = [1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)]^2.$$

$$1095. y^{(2n-1)}(0) = 0; \quad y^{(2n)}(0) = 2[2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)]^2.$$

$$1096. -\frac{2 dx^2}{9x \sqrt[3]{x}}. \quad 1097. m(m-1)(m-2)x^{m-3} dx^2.$$

$$1098. 4(x+1)(5x^2-2x-1) dx^2. \quad 1099. 4-x^2 \cdot 2 \ln 4 \cdot (2x^2 \ln 4 - 1) dx^2.$$

$$1100. \frac{ab(a^2-b^2) \sin 2x dx^2}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2}. \quad 1101. \frac{4 \ln x - 4 - \ln^3 x}{x^2 \sqrt{(\ln^2 x - 4)^3}} dx^2.$$

$$1102. -4 \sin 2x dx^2. \quad 1103. \pm \frac{3a \sec^2 \varphi}{4 \sqrt{\tan \varphi}} (1 + 5 \tan^2 \varphi) d\varphi^2.$$

$$1104. \frac{\frac{2}{3} dx^2}{\frac{4}{3} \frac{1}{y}}. \quad 1105. 1) d^2 y = \frac{4x}{x^4-1} d^2 x - \frac{4(1+3x^4)}{(x^4-1)^2} dx^2;$$

$$2) d^2 y = |4 \sec^2 2t dt^2.$$

$$1106. 1) d^2 y = \cos z d^2 z - \sin z dz^2;$$

$$2) d^2 y = a^x \cos(a^x) \ln a d^2 x - a^x \ln^2 a (a^x \sin a^x - \cos a^x) dx^2;$$

$$3) d^2 y = a^{t^3} \ln a [\cos a^{t^3} (6t + 9t^4 \ln a) - a^{t^3} \sin a^{t^3} 9t^4 \ln a] dt^2.$$